Republique du Cameroun
. Paix-Travail-Patrie
Ministère de l'Enseignement Supérieur
. **Université de Douala**
Faculté de Génie Industrielle

Republic of Cameroon
Peace-Work-fatherland
Ministry Of Higher Education
University Of Douala
Faculty Of Industrial Engineering

Année Académique 2009-2010
Academic Year 2009-2010

CONCOURS D'ENTREE EN 1$^{\text{ERE}}$ ANNEE, SESSION DE SEPTEMPBRE 2009
FIRST YEAR ENTRANCE EXAMINATION, SEPTEMBER SESSION 2009

EPREUVE DE (PAPER OF) : MATHEMATIQUES (METHEMATICS) BAC : CDE et GCE A-LEVEL
Durée (Time) : 4 heures (hours)

Exercice 1

1. Dans un atelier de fabrication, l'employé AMOUGOU prend 6 minutes de moins que l'employer EBONGUE pour fabriquer une même pièce. Combien de pièces aura fabriqué des employers en 7 heures si durant cet intervalle de temps, AMOUGOU fabrique 8 pièces de plus que EBONGUE ?
2. Résoudre l'équation suivante : $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$.

Exercice 2

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \ln(1+e^{-x}) - \dfrac{1}{e^x+1}$.

1. Déterminer la limite de h en $+\infty$.
2. Calculer la dérivé h' de h et vérifier que pour tout réel x, $h'(x) = -\dfrac{1}{e^x+1}$. En déduire que pour tout réel x, $h(x) > 0$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x\ln(1+e^{-x})$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = -xe^x + e^x\ln(1+e^x)$ et en déduire la limite de f en $-\infty$.
3. (a) Justifier la dérivabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer f' la dérivée de f et vérifier que $f'(x) = e^x h(x)$.
   (c) Dresser le tableau de variation et construire le graphe (C_f) de la fonction f dans un repère orthogonal.

On admet que le point $A(a,b)$ est centre de symétrie de la courbe (C_f) si et seulement si pour tout réel x, $\dfrac{f(a+h)+f(a-h)}{2} = b$.

1. Si la courbe (C_f) admet un centre de symétrie A, indiquer sans justifier l'ordonnée de ce point A.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ qu'on notera α.
3. On admet que $\dfrac{f(2\alpha)+\ln 2}{2} > \dfrac{1}{2}$, la courbe (C_f) admet-elle un centre de symétrie ?

Exercice 3

I. Selon la définition de l'exponentielle, pour tout réel θ, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Démontrer que pour tous réels θ, θ', $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$. En déduire que pour tout réel θ, et pour tout entier naturel non nul n, on a $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

II. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$). On pose $w = e^{i2\pi/5}$.

1. Simplifier w^5 puis $1 + w + w^2 + w^3 + w^4$.
2. Montrer que pour tout nombre complexe z non nul,

$$\frac{1}{z^2} = (1 + z + z^2 + z^3 + z^4) = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1$$

3. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.
   (b) En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$ (question annulée lors des corrections)
4. On note K, A et B les points d'affixes respectives $-\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{i}{2}$; w. Soit C le cercle de centre K passant par A.
   (a) Déterminer une équation du cercle C.
   (b) Le cercle C coupe l'axe $(O, \vec{u})$ en deux points H et H' (H étant d'abscisse pisitive). Montrer que H a pour abscisse $\cos\frac{2\pi}{5}$.
   (c) En déduire une construction géométrique simple du point B.
   (d) Achever la construction du pentagone régulier de centre O dont B est un sommet.

Exercice 4

Les parties A et B sont indépendantes.

A- On donne l'équation différentielle $y'' + 26y = 0$.

1. Donner la forme des solutions de cette équation.
2. Déterminer la fonction f solution de cette équation satisfaisant aux conditions suivantes :
   (a) la courbe représentative de f passe par le point $G\binom{0}{\sqrt{3}}$;
   (b) la droite tangente à cette courbe au point G a pour coefficient directeur 6.
3. Vérifier que pour tout x, $f(x) = 2\sin\left(6x + \frac{\pi}{3}\right)$.

B- On définit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n t dt$.

1. (a) Calculer I_0 et I_1.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel p, $I_{p+2} + I_p = \dfrac{1}{p+1}$. En déduire I_2, I_3.
2. Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et en déduire qu'elle converge.