Chapitre 7

Fonction exponentielle, Fonction puissance

La fonction ln $:]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ est bijective, elle admet donc une bijection réciproque définie de $\mathbb{R}$ vers $]0;+\infty[$.

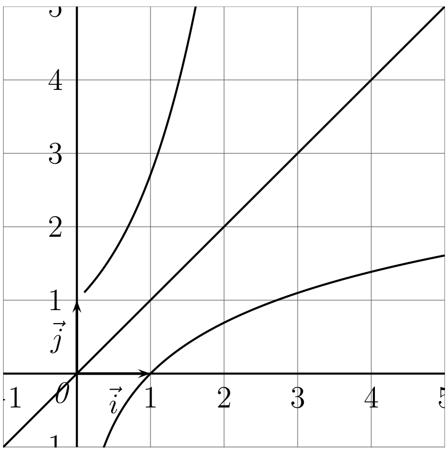
7.1 Fonction exponentielle

Définition 7.1. *On appelle fonction exponentielle la bijection réciproque de la fonction* ln *qu'on note :*

$$\begin{array}{rccc} \exp : & \mathbb{R} & \to &]0;+\infty[\\ & x & \mapsto & \exp(x) \end{array}$$

Proposition 7.1.
- $D_{\exp} = \mathbb{R}$.
- $\forall x \in R$, $\exp(x) > 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$ *et* $\forall y \in]0;+\infty[$, $y = \exp(x) \Leftrightarrow x \ln y$.
- $\forall x \mathbb{R}$, $\ln(\exp(x)) = x$, $\forall y \in]0;+\infty[$, $\exp(\ln(y)) = y$.
- $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e$.

Remarque 7.1. $x \mapsto \exp(x)$ *varie dans le même sens que sa bijection réciproque* ln *et les courbes* $(C_{\ln})$ *et* $(C_{\exp})$ *sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes.*



La fonction exp vérifie la fondamentale propriété suivante.

Proposition 7.2. *Pour tout couple* (x, y) *de réels, on a :*

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y).$$

Démonstration. On a $\ln(\exp(x+y)) = x+y$. D'autre part

$$\ln(\exp(x)\exp(y)) = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) = x+y.$$

On a alors $\ln(\exp(x+y)) = \ln(\exp(x)\exp(y))$. Comme ln est bijective, on déduit que $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$. □

Corollaire 7.1. *Pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ et tout entier relatif n, on a :*
- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.
- $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$.
- $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

Remarque 7.2. *Remarquons que* $\ln e = 1$ *c'est-à-dire* $\exp(1) = e$. *Ainsi,* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \exp(x \times 1) = (\exp(1))^x = e^x$. *On convient donc de noter* e^x *au lieu de* $\exp(x)$. *Dans toute la suite, on écrira donc* e^x *pour dire* $\exp(x)$.

Théorème 7.1 (Dérivabilité)**.** *La fonction* $f : x \mapsto e^x$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $f'(x) = e^x$.

Démonstration. On sait que pour une fonction dérivable et bijective, non nulle sur un intervalle I, la bijection réciproque f^{-1} a pour dérivée $(f^{-1})(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$. Comme e^x est la bijection réciproque de $\ln(x)$, et que $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, on déduit que :

$$(e^x)' = \frac{1}{\ln'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x.$$

□

Remarque 7.3. $f'(x) = e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *donc la fonction* $x \mapsto e^x$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$. *On en déduit que* $f(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} f; \lim_{+\infty} f[=]0; +\infty[$.

Proposition 7.3 (Comportement asymptotique)**.**
- $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ *donc la droite d'équation* $y = 0$ *est asymptote à* (C_{e^x}) *au voisinage de* $-\infty$.
- $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ *donc la fonction* $x \mapsto e^x$ *admet une brache parabolique de direction* (OJ).

Démonstration. La première limite est conséquence de la définition. Pour la seconde, posons $\phi(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. On a $\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = 0$ et $\forall x \in]1; +\infty[$, $\phi(x) > 0$. On peut écrire $\frac{e^x}{x} = \frac{e^x}{\ln(e^x)} = \frac{1}{\phi(e^x)}$. Comme $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = 0$, on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\phi(e^x)} = +\infty$. D'où $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = 0$. □

Proposition 7.4. *On a la limite classique suivante :* $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Démonstration. En effet on a $\frac{e^x-1}{x} = \frac{e^x - e^0}{x-0}$. D'où $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = [e^x]_{x=0} = e^0 = 1$. □

Proposition 7.5 (Primitives de $x \mapsto e^x$)**.** *Les primitives de la fonction exponentielle sont les fonction* $x \mapsto e^x + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Proposition 7.6. *Soit* u *une fonction dérivable sur un intervalle* I. *Alors la fonction* $f : x \mapsto e^{u(x)}$ *est dérivable et on a* $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$. *Le signe de* f' *est alors celui de* u'.

Exemple 7.1. *Soit $f : x \mapsto e^{\sqrt{x}\ln(x^2+7)}$, $x \geq 0$. On a $u(x) = \sqrt{x}\ln(x^2+7)$ qui est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(x^2+7) + \frac{2x\sqrt{x}}{x^2+7}$. On en déduit que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et*

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(x^2+7) + \frac{2x\sqrt{x}}{x^2+7}\right) e^{\sqrt{x}\ln(x^2+7)}.$$

Exemple 7.2 (Recherche d'une primitive)**.** *Trouver les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x) = 3(x+1/2)e^{x^2+x}$.*

Posons $u(x) = x^2 + x$, alors $u'(x) = 2x + 1 = 2(x + 1/2)$ d'où $f(x) = \frac{3}{2}u'(x)e^{u(x)}$. On en déduit que les primitives de F sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $F(x) = \frac{3}{2}e^{x^2+x} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Remarque 7.4. $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

Exemple 7.3 (Etude d'une fonction)**.** *On considère la fonction $f(x) = \frac{x+1}{e^{x^2+2x}}$.*

- f est définie sur $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{(1-\sqrt{2}-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}+\sqrt{2}x)}{e^{x^2+2x}}$. L'équation $f'(x) = 0$ conduit à $x = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. On déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{2}e^{1/2}$	$\nearrow$	$\frac{2}{2}e^{1/2}$	$\searrow$	0

- On en déduit le tracé

7.2 Fonctions puissances

7.2.1 Puissance réelle d'un nombre réel positif

Définition 7.2. *Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On a $a^x = e^{x\ln a}$.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f : x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$. Elle admet donc une bijection réciproque définie sur $\mathbb{R}_+$ appelée fonction racine $n-$ième : $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $x > 0$. On note encore $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Remarque 7.5. *Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$:*
- *si $0 < x < 1$ on a $x^n < x < \sqrt[n]{x}$;*
- *si $x > 1$, alors $\sqrt[n]{x} < x < x^n$.*

7.2.2 Fonction puissance

Définition 7.3. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on appelle puissance d'exposant α est l'application*

$$\begin{array}{rccl} f_\alpha : &]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \end{array}$$

Variations de f_α

La fonction $x \mapsto \alpha \ln x$ est continue, dérivable, strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
La fonction $x \mapsto e^x$ est continue, dérivable strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'où $x \mapsto e^{\alpha \ln x}$ est continue, dérivable et monotone sur $]0;+\infty[$ et $\forall x \in]0;+\infty[$,

$$f'_\alpha(x) = (\alpha \ln c)' e^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha x^{-1} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Le signe de f'_α est donc celui de α. f_α est croissante pour $\alpha > 0$ et décroissante pour $\alpha < 0$.

Limites aux bornes de $]0;+\infty[$

$f_\alpha(x) = e^{\alpha \ln x}$,

$$\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{\alpha \ln x} = \begin{cases} +\infty \text{ si } \alpha > 0 \\ 0 \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f_\alpha(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\alpha \ln x} = \begin{cases} +\infty \text{ si } \alpha < 0 \\ 0 \text{ si } \alpha > 0 \end{cases}$$

Tableaux de variations

Si $\alpha < 0$, alors on a le tableau

x	0		1	$+\infty$
f'_α	||		$-$	
f_α	||	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Et si $\alpha > 0$, on a

x	0		1	$+\infty$
f'_α	||		$+$	
f_α	||	0	$\nearrow$	$+\infty$

Il faut remarquer que si $\alpha > 0$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f_\alpha(x) = 0$ donc f_α est prolongeable par continuité en 0.
Que dire de la dérivabilité de f_α en 0^+ ?
On a

$$\frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x} = \frac{x^\alpha}{x} = x^{\alpha-1}.$$

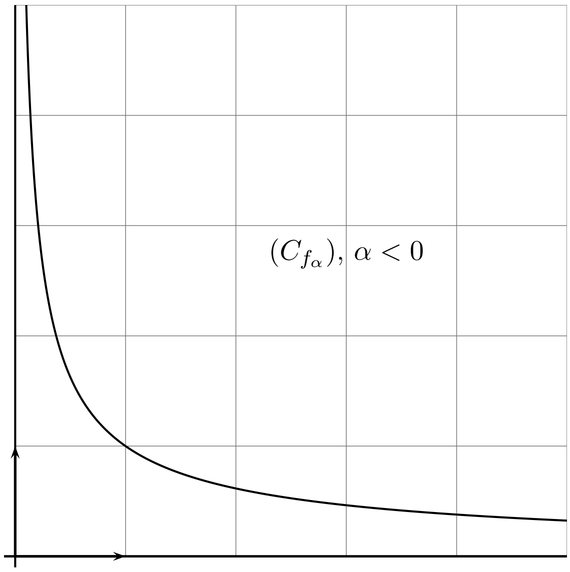
On en déduit

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_\alpha(x)-f_\alpha(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-1} = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha > 1 \\ 1 \text{ si } \alpha = 1 \\ +\infty \text{ si } \alpha < 1 \end{cases}$$

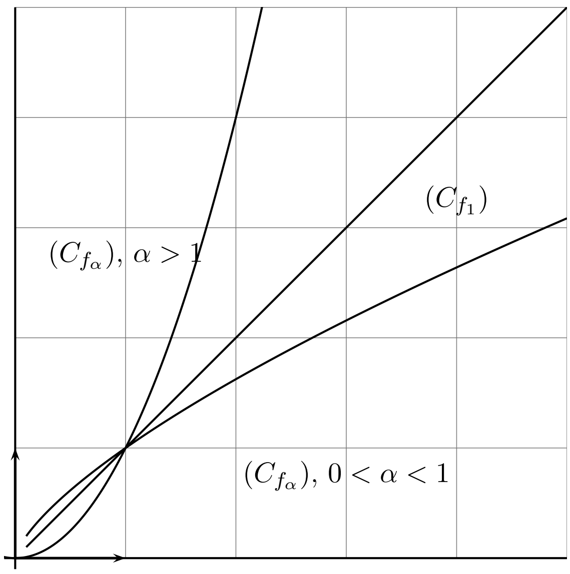
f_α est alors dérivable à droite de 0 si $\alpha \geq 1$ et admet une demi-tangente verticale si $\alpha < 1$. On vérifie aussi les résultats suivants :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f_\alpha(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} x^{\alpha-1} = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 < \alpha < 1 \\ 1 \text{ si } \alpha = 1 \\ +\infty \text{ si } \alpha > 1 \end{cases}$$

qui permettent de dire que f_α admet une brache parabolique de direction (OI) si $0 < \alpha < 1$ et une branche parabolique de direction (OJ) si $\alpha > 1$. On a alors les représentations graphiques suivantes :



et



Proposition 7.7. *Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$. Les primitives sur $]0;+\infty[$ de $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ sont les fonctions $F_\alpha : x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + k$, $k \in \mathbb{R}$.*

Exemple 7.4. *Soit à déterminer les primitives de la fonction* $f : x \mapsto x^2\sqrt{x}$ *sur* $]0; +\infty[$. *On remarque que* $f(x) = x^{5/2}$ *donc les primitives de* f *sont les fonctions* $F(x) = \frac{1}{1+5/2}x^{1+5/2} + k = \frac{2}{7}x^{7/2} + k$ *donc* $F(x) = \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Proposition 7.8. *Soit* I *un intervalle et* $u : I \to]0; +\infty[$ *une fonction dérivable sur* I. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$, *alors les primitives de* $f_\alpha : x \mapsto u'(x)(u(x))^\alpha$ *sont les fonctions* $F_\alpha : x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}(u(x))^{\alpha+1} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

7.3 Croissance comparée des fonctions exponentielle, puissance et logarithme népérien

Théorème 7.2. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, *alors*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \qquad \text{et } \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0.$$

Démonstration. On a déjà le résultat pour $\alpha = 1$, c'est-à-dire, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$. On écrit $\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = 0 \times 0 = 0$.
Pour la seconde limite, Poser $X = x^\alpha$, alors quand x^α tend vers 0, X tend aussi vers 0 d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0 = \lim\limits_{X\to 0} X$. Ainsi,

$$0 = \lim_{X\to 0^+} X\ln X = \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x^\alpha = \alpha \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x.$$

□

La première limite traduit le fait que la fonction puissance croit vers $+\infty$ plus vite que la fonction logarithme népérien.

Théorème 7.3. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \qquad \text{et } \lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0.$$

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x^\alpha}$ est définie sur $]0; +\infty[$.

- si $\alpha < 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$;
- si $\alpha > 0$. Soit $u : x \mapsto \ln\left(\frac{e^x}{x^\alpha}\right)$, $x > 0$, alors

$$u(x) = \ln e^x - \ln x^\alpha = x - \alpha\ln x = x\left(1 - \alpha\frac{\ln x}{x}\right).$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$; puisque $\frac{e^x}{x^\alpha} = e^{u(x)}$, on déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$.
Cette limite traduit le fait que la fonction exponentielle croit vers $+\infty$ plus vite que la fonction puissance.

□

Corollaire 7.2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$.

Exercice 7.1. *Faire les exercices 1, 2, 5, 7, 8, 12, 13, 18, 19, 21, 33, 37(à faire absolument).*