MINESEC **Année scolaire : 2010-2011**
Lycée de Japoma **Classe : T^{le} C Durée : 4 heures**
Département de Mathématiques **Séquence 1 09 Octobre 2010**
www.easy-maths.org **Coef : 05**

Épreuve de Mathématiques

Enseignant : **Njionou Patrick, S.**

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE 1 **5 points**

On rappelle que pour tout entier α différent de 1, *on a* $1+\alpha+...+\alpha^n=\frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}$.

1. Soit n un entier naturel non nul ayant pour décomposition en facteurs premiers $n=a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$. On appelle s la somme de tous ces diviseurs.

1.1 Déterminer le nombre N des diviseurs de n. [1pt]

1.2 Déterminer la somme s de tous les diviseurs de n. [1pt]
(On établira que $s=\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\times\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\times\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}\times\frac{d^{\delta+1}-1}{d-1}$)

1.3 Calculer la somme des diviseurs de $n=1260$. [1pt]

2. Déterminer un entier de décomposition $a^x b^y$ qui admet 6 diviseurs dont la somme $s=228$. [1pt]
(On remarquera que $s=\frac{a^{x+1}-1}{a-1}\times\frac{b^{y+1}-1}{b-1}$).

3. On dit qu'un entier Z est parfait si et seulement si la somme $s(Z)$ de ses diviseurs vaut $s(Z)=2Z$. Démontrer que si 2^n-1 est premier, alors $2^{n-1}(2^n-1)$ est parfait. [1pt]

EXERCICE 2 **4 points**

a et b sont deux entiers naturels tous non nuls.

1. On suppose que $pgcd(a,b)=1$. Montrer que $pgcd(a+b,ab)=1$. [1pt]

2. On ne suppose plus $pgcd(a,b)=1$. On pose $\mu=ppcm(a,b)$, $pgcd(a,b)=d$ et $D=pgcd(a+b,\mu)$. On se propose de montrer que $D=d$ c'est-à-dire $pgcd(a+b,\mu)=pgcd(a,b)$.

a. Soit a' et b' les entiers tels que $a=da'$ et $b=db'$, soit k un entier non nul.

i. Justifier l'existence de a' et b'. [0.5pt]

ii. Exprimer $pgcd(ka,kb)$ en fonction de $pgcd(a,b)$ et de k. [0.5pt]

iii. Calculer $pgcd(a',b')$. [0.5pt]

iv. Déduire de ce qui précède que $pgcd(a'+b',a'b')=1$. [0.5pt]

b. En déduire que $pgcd(a+b,\mu)=pgcd(a,b)$. [1pt]

EXERCICE 3 **5 points**

1. On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs N tels que

$$\begin{cases} N \equiv 5 \quad [13] \\ N \equiv 1 \quad [17] \end{cases}$$

a. Vérifier que 239 est solution de ce système. [0.5pt]

b. Soit N un entier relatif solution de ce système.
Démontrer que N peut s'écrire sous la forme $N = 1 + 17x = 5 + 13y$ où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x - 13y = 4$. [0.5pt]

c. Résoudre l'équation $17x - 13y = 4$ où x et y sont des entiers relatifs. [1pt]

d. En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $N = 18 + 221k$. [1pt]

e. Démontrer l'équivalence entre $N \equiv 18 \quad [221]$ et $\begin{cases} N & \equiv & 5 & [13] \\ N & \equiv & 1 & [17] \end{cases}$. [1pt]

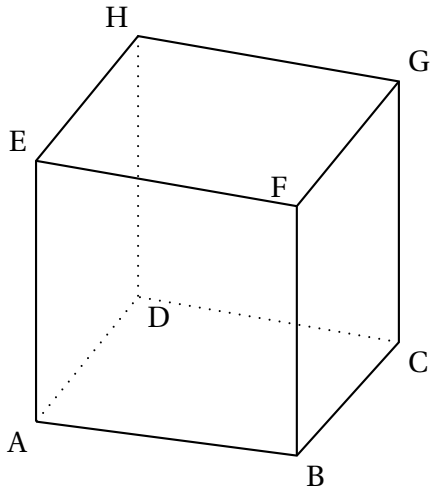
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

a. Existe-t-il un entier naturel k tel que $10^k \equiv 1 \quad [17]$? [0.5pt]

b. Existe-t-il un entier naturel l tel que $10^l \equiv 18 \quad [221]$? [0.5pt]

EXERCICE 4 **6 points**

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 3.



On choisit le repère orthonormal $\left(\text{D} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ tel que $\vec{\imath} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{DA}}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{DC}}$ et $\vec{k} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{DH}}$.

1. **a.** Donner les coordonnées des points A, C et E. [1pt]

b. Déterminer les coordonnées du point L barycentre du système $\{(\text{C} ; 2), (\text{E} ; 1)\}$. [1pt]

c. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{AE}}$ et $\overrightarrow{\text{DL}}$. [1pt]

2. Soit (a, b) un couple de réels. On note M le point de la droite (AE) tel que $\overrightarrow{\text{A}M} = a\overrightarrow{\text{AE}}$ et N le point de la droite (DL) tel que $\overrightarrow{\text{D}N} = b\overrightarrow{\text{DL}}$.

a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\text{AE}}$ et $\overrightarrow{\text{DL}}$ si et seulement si le couple (a, b) vérifie le système $\begin{cases} -a + 2b & = & 1 \\ 3a - b & = & 0 \end{cases}$ [1pt]

b. En déduire qu'il existe un seul point M_0 de (AE) et un seul point N_0 de (DL) tels que la droite (M_0N_0) est orthogonale aux droites (AE) et (DL). [0.5pt]

c. Déterminer les coordonnées des points M_0 et N_0 puis calculer la distance M_0N_0. [1.5pt]