Chapitre 8

Suites numériques

La notion de suite numérique a été déjà introduite en classe de Première. On rappelle ici la définition d'une suite numérique et complète les connaissances déjà acquises. On introduit ensuite les notions de suites périodiques et de suites adjacentes.

8.1 Généralités sur les suites numériques.

8.1.1 Définition et notation

Définition 8.1. *On appelle suite numérique toute application de* $\mathbb{N}$ *ou d'une partie de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *;*

Notation 8.1. *On désigne une suite numérique par l'une des lettres* u, v, w,...*On a* $u : I \subset \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto u(n)$. *La valeur* $u(n)$ *prise par la suite* u *en* n *se note* u_n *et est appelée terme de rang* n. *La suite* u *se note* $(u_n)_{n\in I}$ *ou* (u_n).

8.1.2 Détermination d'une suite

Par une formule explicite

$u : n \mapsto u_n = f(n)$ où f est une fonction numérique.

Exemple 8.1. $u : n \mapsto \sqrt{n^2 - 4}$. *On a* $u_n = f(n)$ *avec* $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$. *Dans ce cas,* $I = \{2, 3, 4, \ldots\} \subset \mathbb{N}$.

Par une formule de récurrence

On donne le premier terme et une formule permettant de calculer un terme connaissant le où les termes précédants.

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad n \geq 0. \end{cases}$$

8.2 Comparaison de suites

8.2.1 Suites majorées, suites minorées

Définition 8.2. *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite numérique.*

1. *(u_n) est dite majorée s'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. M est alors un majorant de la suite (u_n).*
2. *La suite (u_n) est dite minorée s'il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n$. m est un minorant de (u_n).*
3. *(u_n) est bornée si elle est majorée et minorée.*

Exemple 8.2. *Montrer que la suite $(u_n)_{n>0}$ définie par $u_n = \frac{\ln n}{n+1}$ est bornée.*
Pour tout $x > 0$, on a $\ln x \leq x - 1$. En particulier, pour tout entier $n > 0$, on a $\ln n \leq n - 1$, d'où $u_n \leq \frac{n-1}{n+1} \leq 1$. De plus, $\forall n > 0$, $u_n \geq 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq 1$.

8.2.2 Comparaison des suites

Définition 8.3. *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites numériques.*

1. *On dit que la suite (v_n) majore la suite (u_n) à partir d'un certain rang k si $\forall n \geq k$, on a $u_n \leq v_n$. On dit aussi que la suite (u_n) minore la suite (v_n) à partir du rang k.*
2. *On dit que (u_n) et (w_n) encadrent la suite (v_n) à partir du rang k si $\forall n \geq k$, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$.*

Proposition 8.1. *Si la suite (v_n) majore la suite (u_n) à partir du rang k, et si la suite (v_n) est majorée par un réel M, alors la suite (u_n) est majorée par M.*

8.3 Variations d'une suite

Définition 8.4. *Soit (u_n) une suite numérique.*

1. *On dit que (u_n) est croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.*
2. *On dit que (u_n) est décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$.*
3. *(u_n) est constante lorsque pour tout n, $u_n = u_{n+1}$.*
4. *(u_n) est monotone si elle et soit décroissante soit croissante.*
5. *On dit que (u_n) est stationnaire s'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier naturel n, $n \geq n_0 \Rightarrow u_n = u_{n_0}$.*
6. *(u_n) est dite positive (respectivement négative) si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ (respectivement $u_n \leq 0$).*

La proposition suivante est très souvent utile lors de l'étude des variations d'une suite.

Proposition 8.2. *Soit (u_n) une suite numérique.*

1. *(u_n) est croissante (respectivement décroissante) si et seulement si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ (rspectivement $u_{n+1} - u_n \leq 0$)*
2. *Si (u_n) est strictement positive, alors (u_n) est croissante (respectivement décroissante) si et seulement si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ (respectivement $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$).*

8.4 Suite périodique

Définition 8.5. *$(u_n)_{n\geq 0}$ est dite périodique s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{n+p} = u_n$. p est appelée la période de la suite (u_n).*

Exemple 8.3.
1. *$u_n = (-1)^n$ est périodique de période 2.*
2. *$u_n = \cos \frac{n\pi}{3}$ est périodique de période 6.*

8.5 Convergence des suites numériques

8.5.1 Suites convergentes

Définition 8.6. *Une suite (u_n) est dite convergente lorsqu'elle admet une limite finie l lorsque n tend vers $+\infty$. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.*
La suite (u_n) est dite divergente lorsqu'elle ne converge pas (elle admet une limite infinie ou elle n'admet pas de limite).

Limite d'une suite définie par une formule explicite

Si (u_n) est une suite définie par $u_n = f(n)$ où f est une fonction numérique, et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Exemple 8.4. $u_n = \frac{3n+5}{n+1}$. *On a* $f(x) = \frac{3x+5}{x+1}$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Limite d'une suite définie par une formule de récurrence.

Si (u_n) est définie par une formule de récurrence de la forme $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad n \geq 0 \end{cases}$. Si (u_n) converge vers l et si f est continue, alors $f(l) = l$. De façon précise, l'équation $f(x) = x$ nous donne les limites éventuelles de la suite (u_n).

Exemple 8.5. *Déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n) définie par le formeule de récurrence* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ 3u_{n+1} = u_n + 4. \end{cases}$. *Si (u_n) converge vers l, alors on a $3l = l + 4$ dont $l = 2$.*

Proposition 8.3.
1. *Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.*
2. *Toute suite croissante et majorée converge.*
3. *Toute suite décroissante et minorée converge.*

Exemple 8.6. *Soit la suite (u_n) définie par* $\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$.

1. *Montrer que si (u_n) converge, alors sa limite ne peut être que 0 ou 1.*
2. *On suppose que $u_0 < 1$. Montrer que (u_n) est croissante et majorée par 1.*
3. *On suppose que $u_0 > 1$, montrer que (u_n) est décroissante et minorée par 1.*
4. *Déduire que (u_n) converge vers 1.*

Résolution

1. Si (u_n) converge vers l, alors $l = \sqrt{l}$ donc $l^2 - l = 0$ et par suite $l = 0$ ou $l = 1$.
2. Supposons $u_0 < 1$. Alors $u_1 = \sqrt{u_0} > u_0$. Supposons que pour un $n \geq 0$, $u_{n+1} > u_n$, alors $\sqrt{u_{n+1}} \geq \sqrt{u_n}$ c'est-à-dire $u_{n+2} \geq u_{n+1}$. Ainsi, pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq u_{n+1}$ et la suite (u_n) est croissante. On montre de même et par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 1.
3. La preuve est analogue à celle de la question ci-dessus.
4. Si $u_0 < 1$, (u_n) est croissante et majorée donc converge vers un réel $l \leq 1$. Si $u_0 > 1$, alors (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc converge vers un réel $l \geq 1$. Ainsi, dans tous les cas, la suite (u_n) va converger vers 1.

8.6 Suites adjascentes.

Les suites adjascentes sont souvent d'une grande importance en mathématique. On les utilise par exemple pour montrer la convergence des fractions continues numériques, l'irrationnalité et la transcendance de e...

Définition 8.7. *Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjascentes si :*
- *(u_n) est croissante et (v_n) decroissante.*
- *$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$*
- *$\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.*

Proposition 8.4. *Soit (u_n) et (v_n) deux suite adjascentes. Alors :*

1. *la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est décroissante.*
2. *Les suites (u_n) et (v_n) convergent et ont la même limite.*

Démonstration. Exercice. □

Exemple 8.7. *Faire l'exercice 42 de la page 294.*

8.7 Suites arithmétiques-Suites géométriques

8.7.1 Suites arithmétiques

Définition 8.8. *Une suite est dite arithmétique lorqu'il existe un réel r tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$. r est appelé la raison de la suite (u_n).*

Remarque 8.1. *Pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, il suffit donc de montrer que la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante.*

Proposition 8.5. *Soit (u_n) une suite arithmétique de permier terme u_0 et de raison r, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 + nr$.*

Remarque 8.2. *Si le premier terme est u_k alors $u_n = u_k + (n-k)r$.*

Proposition 8.6. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.*

1. *si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante ;*
2. *si $r > 0$, la suite (u_n) est croissante ;*
3. *si $r < 0$, la suite (u_n) est décroissante.*

Démonstration. Exercice. ▪

Proposition 8.7. *Soit (u_n) une suite artihmetique de premier terme u_0 et de raison r. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$. S_n est la somme des n premiers termes de la suite (u_n) et peut être calculée par la formule :*

$$S_n = \frac{n}{2}(u_0 + u_{n-1}) = nu_0 + \frac{n(n-1)}{2}r.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que pour tout $p \in \{0; \dots; n-1\}$, on a $u_{n-1-p} = u_0 + (n-(1+p))r$. Donc $u_p + u_{n-1-p} = 2u_0 + (n-1)r = u_0 + u_0 + (n-1)r = u_0 + u_{n-1}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_p + \cdots + u_{n-1} \\ S_n &= u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_{n-1-p} + \cdots + u_0 \\ 2S_n &= (u_{n-1} + u_{n-2}) + (u_1 + u_{n-2}) + \cdots + (u_p + u_{n-1+p}) + (u_0 + u_{n-1}) \\ &= n(u_0 + u_{n-1}) \end{aligned}$$

On en déduit la première égalité. Pour la seconde égalité, remplacer u_{n-1} par $u_0 + (n-1)r$. ∎

Exemple 8.8. *Trouver un exemple dans le livre.*

8.7.2 Suites géométriques

Définition 8.9. *Une suite (u_n) est géométrique lorsqu'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = qu_n$. q est la raison de la suite (u_n).*

Proposition 8.8. *Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. Alors, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 q^n$.*

Proposition 8.9. *Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_n et de raison $q \neq 1$ (si $q = 1$, la suite est constante et $S_n = nu_0$), alors*

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \frac{1-q^n}{1-q}.$$