**MINESEC**
**Lycée de Japoma**
**Département de Mathématiques**
www.easy-maths.org

**Année scolaire : 2010-2011**
**Classe : $\mathbf{T^{le}}$ C** **Durée : 4 heures**
**Séquence 2** **Novembre 2010**
**Coef : 05**

# Épreuve de Mathématiques

Examinateur : **Njionou Patrick, S.**

*Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.*

**EXERCICE 1** **4 points**

1. $a$ est un entier naturel supérieur ou égal à 1. Montrer que si $2^a - 1$ est premier, alors $a$ est premier. [1pt]
2. $a$ et $b$ sont deux entiers relatifs. Soit $m, n \in \mathbb{N}^\star$.
   - **a.** Montrer que si $pgcd(a^m, b^n) = 1$, alors $pgcd(a, b) = 1$. [1pt]
   - **b.** On suppose que $pgcd(a, b) = 1$. Montrer que $pgcd(a^2, b) = 1$ et $pgcd(a, b^2) = 1$. [1pt]
   - **c.** Montrer que si $pgcd(a, b) = 1$, alors $pgcd(a^m, b^n) = 1$. [1pt]

**EXERCICE 2** **3 points**

1. Soit $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points fixes de l'espace orienté. Quel est l'ensemble des points $M$ tels que : $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{MD} = \vec{0}$ ? [1pt]
2. Soit dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ les points $A(2, 3, 5)$ ; $B(1, 4, -5)$ et $C(3, 9, 1)$.
   - **a.** Déterminer un vecteur normal au plan $(ABC)$ et en déduire une équation cartésienne de ce plan. [0,5pt]
   - **b.** Calculer l'aire du triangle $ABC$. [0,5pt]
   - **c.** Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\| = 2\sqrt{102}$. [1pt]

**EXERCICE 3** **6 points**

1. **a.** Calculer de deux façons différentes la racine carrée de $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. [1pt]
   - **b.** En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$. [1pt]
2. Soit $a$ un paramètre réel. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$ suivante :

$$z^2 - (1+i)(1+a)z + i\left(1+a^2\right) = 0.$$

   - **a.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\delta^2 = -2i(1-a)^2$. [1pt]
   - **b.** Déduire les solutions $z_1$ et $z_2$ de l'équation $(E)$. [1pt]
   - **c.** Soit $Z_1(z_1)$ et $Z_2(z_2)$ deux points du plan complexe et $M$ le milieu du segment $[Z_1Z_2]$. Déterminer l'ensemble des points $M$ lorsque $a$ varie dans $\mathbb{R}$. [1pt]
   - **d.** On considère le point $A(4+i)$. Déterminer suivant les valeurs de $a$ la nature de la figure $AZ_1Z_2$ ? [1pt]

**PROBLEME** **7 points**

On considère la fonction numérique $f$ définie par

$$f(x) = -\frac{3x^3+3x^2-4}{3x^2-4}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $D_f$ de $f$, puis calculer les limite de $f$ aux bornes de $D_f$. [1pt]
2. Déterminer les équations de toutes les asymptotes à la courbe $(C_f)$ représentative de la fonction $f$. [1pt]
3. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$ et établir le tableau de variations de la fonction $f$. [1pt]
4. Construire $(C_f)$ dans un repère orthonormé. *On prendra* $1cm$ *comme unité sur les axes.* [0,5pt]
5. On considère la fonction $g(x) = x - f(x)$.
   - **a.** Montrer que $g$ est continue sur l'intervalle $[-1;1]$. [0,5pt]
   - **b.** Montrer qu'il existe un $\alpha \in [0;1]$ tel que $g(\alpha) = 0$. [0,5pt]
   - **c.** En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. [0,5pt]
   - **d.** Déterminer une valeur approchée de cette solution à $10^{-2}$ près. [1pt]
6. Discuter suivant la valeur de $m$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$. [1pt]