Université de Douala **Faculté des Sciences**

Contrôle continu de l'UE MA 435 : Polynômes orthogonaux classiques
Année 2009/2010. Durée : 1h30.
Responsable : Prof Dr Mama Foupouagnigni

Q 1 (8 points). Soit $(P_n)_n$ une famille de polynômes orthogonaux classique par rapport à un poids ρ sur un intervalle (a,b) où a et b sont deux réels tels que $a<b$.

1. Rappeler la définition d'une fonction poids. [1.5pt]
2. Donner toutes les caractéristiques de la famille $(Q_n)_n$ avec $Q_n = \frac{1}{n+1}P'_{n+1}$. [3pts]
3. On suppose qu'une famille $(R_n)_n$ de polynômes tels que pour tout n, R_n soit de degré n satisfait une équation différentielle de la forme

$$\sigma(x)y''(x)+\tau(x)y'(x)+\lambda_n y(x)=0$$

   où σ est un polynôme de degré 2, τ un polynôme de degré 1 exactement et λ_n une constante. Montrer qu'elle est orthogonale par rapport à un poids que l'on déterminera. [3.5pts]

Q 2 (12 points). On définit la fonction L_n^α de la façon suivante :

$$L_n^\alpha(x)=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}\ {}_1F_1(-n;\alpha;x).$$

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, L_n^α est une polynôme de degré n. [2pts]
2. Montrer que [2pts]

$$\sum_{n=0}^{+\infty}L_n^\alpha(x)r^n=\frac{1}{(1-r)^{\alpha+1}}\exp\left(\frac{-xr}{1-r}\right).$$

3. On pose $F(x,r)=\frac{1}{(1-r)^{\alpha+1}}\exp\left(\frac{-xr}{1-r}\right)$. Montrer que [2pts]

$$(1-r^2)\frac{\partial F}{\partial r}+[x-(1+\alpha)(1-r)]F=0.$$

4. Montrer que [2pts]

$$(n+1)L_{n+1}^\alpha(x)+(x-\alpha-2n-1)L_n^\alpha(x)+(n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x)=0.$$

5. Montrer que [2pts]

$$x\frac{dL_n^\alpha(x)}{dx}=nL_n^\alpha(x)-(n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x),\quad n\geq 1.$$

   On pourra utiliser la relation $(1-r)\frac{\partial F}{\partial x}+rF=0$.
6. Déduire que L_n^α est solution de l'équation différentielle [2pts]

$$xu''+(\alpha+1-x)u'+nu=0.$$