Épreuve de Mathématiques

Enseignant : **Romaric Tchapnga (PLEG)**

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE I **3 points**

1. Déterminer l'équation de la parabole dont la courbe représentative passe par les points : $A(1\,;\,0)$, $B(2\,;\,-5)$ et $C(3\,;\,-12)$. 0,75 pt
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.
   - **a.** Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$. 0,75 pt
   - **b.** Démontrer par recurrence que pour tout entier naturel $n\geq 2$, $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n\times n!}{(x+1)^{n+1}}$. 0,75pt
3. Démontrer par recurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $1\times 1!+2\times 2!+3\times 3!+\cdots+n\times n!=(n+1)!-1$. 0,75 pt

EXERCICE II **7 points**

A - **1.** **a.** Démontrer par recurrence que pour tout entier naturel n, $2^{3n}-1$ est multiple de 7. 0,75 pt

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $2^{3n+1}-2$ et $2^{3n+2}-4$ sont des multiples de 7. 0,5 pt

2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2. 0,75 pt

3. Soit $p\in\mathbb{N}$, on pose $A_p = 2^p+2^{2p}+2^{3p}$.

- **a.** On pose $p=3k$, quel est le reste de la division euclidienne de A_p par 7 ? 0,5 pt
- **b.** Montrer que si $p=3k+1$, alors A_p est divisible par 7. 0,5 pt
- **c.** Etudier le cas où $p=3k+2$. 0,75 pt

4. On cosidère les nombres entiers A et B écrit dans le système binaire
$A = 1001001000$ et $B = 1000100010000$.

- **a.** Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme A_p. 0,75 pt
- **b.** Les nombres A et B sont-ils divisibles par 7 ? 0,75 pt

B - Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2+5x\equiv 1[7]$. 0,75 pt

C - En remarquant que $999=27\times 37$, montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $10^{3n}\equiv 1[37]$.
En déduire le reste de la division de $10^{10}+10^{20}+10^{30}$ par 37. 1 pt

EXERCICE III **1,25 point**

On rappelle que i est le nombre complexe tel que $i^2=-1$.

1. Calculer i^n suivant les valeurs de l'entier naturel n. 0,5 pt
2. En déduire la valeur de i^{2007}. 0,25 pt
3. Linéariser $\sin^5 x$. 0,5 pt

PROBLEME **8,75 points**

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soit R la transformation du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z', tel que $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} z$.

1. Donner la nature et les élements caractéristiques de la transformation R. 0,5 pt
2. A est le point d'affixe 2. Calculer l'affixe z'_A du point A', image du point A par la transformation R. 0,25 pt
3. Placer les points A et A' sur une figure ainsi que le point I milieu du segment $[AA']$. 0,5 pt
4. En utilisant la nature du triangle OAA', déterminer $mes(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OI})$. 0,5 pt
5. Calculer l' affixe du point I et donner l'écriture trigonométrique de z_I. 0,5 pt
6. Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$. 1 pt

Partie B

Dans le plan complexe est rapporté à un repère ort.honormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$d'unité graphique 3 cm. Soit A le point d'affixe i. A tout point M du plan distinct de A, d'affixe z, on associe le point M' d(affixe z' défini par $Z = \dfrac{z^2}{\mathrm{i} - z}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z' = z$. 0,5 pt
2. On pose $z = x + \mathrm{i}y$.
   Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y. 1 pt
3. En déduire et construire l'ensemble des points $M(z)$ tel que $M'(z')$ est situé sur l'axe des imaginaires purs. 0,75 pt
4. Etablir une relation liant les distances OM, AM et OM'. 0,25 pt
5. En déduire l'ensemble (E) des points $M(z)$ du plan tels que M et M' soient situés sur un même cercle de centre O. Construire (E). 0,75 pt
6. Dans cette question, on considère le point M situé sur le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$. Le point $M'(z')$ correspond à M, et G l'isobarycentre des points A, M et M'.
   a. Calculer l'affixe de G en fonction de z. 0,5 pt
   b. Montrer que G est situé sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon. 0,5 pt
   c. Comparer les mesures des angles $(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OG})$ et $(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AM})$, effectuer la construction de G et de M'. 1,25 pt