Chapitre 12

Calcul des probabilités

Historiquement, le calcul des probabilitées s'est développée à partir du XVIIeme siècle autour des problèmes de jeux dans des situations où le nombre de cas possibles est fini. Les développements plus récents concernant des espaces non nécessairement finis nécessitent les outils techniques de la théorie de la mesure. Mais on peut introduire simplement sur les espaces finis toutes les notions importantes de probabilités sans avoir besoin de cet outillage.

12.1 Rappels d'analyse combinatoire

12.1.1 Nombre d'applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments

Il y a n^p applications possibles d'un ensemble à p élément dans un ensemble à n éléments.

Exemple 12.1. *De combien de façon peut-on ranger* 15 *livres dans une bibliothèque qui a* 3 *étagères, chaque étagère pouvant contenir de* 0 *à* 15 *livres.*

Chaque livre est rangée dans un tiroir au plus. Un ragement est donc une application de l'ensemble des 15 livres dans l'ensemble des trois étagères. Il y a donc 3^15 rangement possibles.
On peut encore raisonner de la façon suivante : il y a trois façon de ranger le premier livre, trois façon de ranger le second,..., trois façons de ranger le 15ième, il y a donc 3^15 rangements possibles.

12.1.2 Arrangements

Définition 12.1. *Soit p un entier tel que $p \geq 1$. E est un ensemble de cardinal n, $(n \geq p)$. Un arrangement de p éléments de E est $p-$uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ déléments de E. On note A_n^p le nombre d'arrangements de p éléments de E.*

Proposition 12.1. *On a $A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1)$.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle la factorielle de n et on note $n!$ le nombre entier défini par

$$n! = n(n-1)\dots 2 \times 1.$$

Proposition 12.2. $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Exemple 12.2. *Lors d'une course de* $10000m$, *il y a* 20 *coureurs sur la ligne de départ. L'organisateur a décider de primer les trois premiers seulement. Combien y a t-il de façons de distribuer les prix ?*

Un triplet gagnant est un arrangement de 3 coureurs parmi 20. Il y a donc A_{20}^3 triplets gagnants.

12.1.3 Permutations

Si $p = n$, et $cardE = n$, une permutation est un arrangement de n éléments de E. Le nombre de permutations est $A_n^n = n!$.

Exemple 12.3. *Lors d'une reception chez l'ambassadeur Allemand, il y 15 invités qui sont appelés à prendre place autour d'une table ayant exactement 15 chaises. Combien y a t-il de dispositions possibles ?*

Une disposition est un rangement de 15 invités sur 15 chaises. Il y a exactement 15! dispositions possibles.

12.1.4 Combinasons

$CardE = n$, $p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$.

Définition 12.2. *Une combinaison de p éléments de E est une partie de E à p éléments. On note C_n^p le nombre de combinaison de p éléments de E.*

Proposition 12.3. *Le nombre de combinaison de p éléments d'un ensemble ayant n élément est $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$.*

Démonstration. On sait que le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble à n élément est A_n^p. Il est facile de voir qu'avec une partie ayant p éléments, on peut construire $p!$ arrangements de p éléments parmi n. On en déduit que $A_n^p = p!C_n^p$ d'où le résultat annoncé. □

Remarque 12.1. *On a les relations suivantes qui sont faciles à vérifier :*

1. $C_n^p = C_n^{n-p}$.
2. $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$.

Avec la deuxième relation, on construit le fameux triangle de Pascal.

n/p	0	1	2	3	4	5	6	7	...	n
0	1	0								
1	1	1	0							
2	1	2	1	0						
3	1	3	3	1	0					
4	1	4	6	4	1	0				
5	1	5	10	10	5	1	0			
$\vdots$										
n	C_n^0	C_n^1	C_n^2	...						C_n^n

On montrera sur un ou deux exemples comment utiliser le triangle de Pascal pour développer une expression. On fera remarquer au élève que les identités remarquables rencontrée dans les classes précédentes ne sont que des cas particuliers.

Proposition 12.4 (Formule du binôme de Newton). *Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $a, b \in \mathbb{R}$, on a :*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n.$$

Exemple 12.4. *Développer $(a+b)^4$.*

12.1.5 Modèles d'urnes : différents tirages

Soit une urne contenant n boules. On se propose de tirer k boules de l'urne avec $1 \leq k \leq n$. Les n boules sont supposées discernables (par exemple numérotées).

★ **Tirages simultanés**

Si les k boules sont tirées simultannément,, le résultat d'un tirage est une partie k éléments, il y a donc C_n^k tirages possibles.

★ **Tirages successifs sans remise**

Si les k boules sont tirées successivement et sans remise, le résultat d'un tirage est un arrangement de k éléments parmi n, il y a au total A_n^k tirages possibles.

★ **Tirages successifs avec remise**

On tire une boule, on note son numéro et on la remet dans l'urne, et on recommence un autre tirage. On est donc dans les mêmes conditions à chaque tirage, soit n boules dans l'urne. Le résultat d'un tirage est une application d'un ensemble à k éléments dans un ensemble à n éléments. On a donc n^k tirages possibles.

12.2 Vocabulaire des probabilités

12.2.1 Expérience aléatoire-Evénement

Définition 12.3 (Expérience aléatoire)**.** *On appelle expérience aléatoire toute expérience dont le résultat est soumis au hasard.*

Exemple 12.5. *On lance une pièce de monnaie et on s'intéresse au côté apparu quand la pièce est tombée et est stable. Il y a deux possibilités d'apparition : « Face »et « Pile ». L'expérience de la pièce est une expérience aléatoire. L'ensemble des résultats possible est noté* $\{pile, face\}$.

Définition 12.4 (Univers des possibles)**.** *On appelle univers des possibles d'une expérience aléatoire l'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience. On le note en général* Ω.

Exemple 12.6. *Dans l'exemple précédant,* $\Omega = \{pile, face\}$.

Définition 12.5 (Evénement)**.** *Etant donnée une expérience aléatoire, un événement est une partie de l'univers des possibles* Ω.

Exemple 12.7. *On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6, on s'intéresse au numéro sur la face supérieure lorsqu'il est retombé. On a :*

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

Soit A l'événement « la face supérieure du dé porte un multiple de 3 », on a $A = \{3; 6\} \subset \Omega$.

12.2.2 Evénements élémentaires

Définition 12.6. *On appelle événement élémentaire d'une expérience aléatoire tout singleton de l'univers des possibles.*

Exemple 12.8. $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, *les événements élémentaires sont* $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$.

Proposition 12.5. *Tout ensemble non vide de l'univers des possibles d'une expérience aléatoire est réunion des événements élémentaires.*

12.2.3 Evénement impossible-Evénement certain

Définition 12.7. *L'événement impossible d'un univers Ω est la partie vide de Ω notée $\varnothing$.*

Définition 12.8. *L'événement certain d'un univers Ω est la partie pleine de $\Omega = \Omega$.*

Exemple 12.9. *Dans l'exemple du lancé de dé, on va considérer les événements :*
- *A : « le chiffre apparut sur la face supérieure du dé est strictement supérieur à 6 »*
- *B : « le chiffre apparut sur la face supérieure du dé est un nombre entier »*

On a $A = \varnothing$ et $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. A est l'événement impossible et B est l'événement certain.

12.2.4 Opération sur les événements

Définition 12.9 (Evénement "A et B", "A ou B")**.** *Soient A et B deux événement d'un univers Ω.*

1. *L'événement "A et B sont réalisés" est l'intersection $A \cap B$ des deux événements A et B.*
2. *Lévénement "A ou B est réalisé" est la réunion des deux événements A et B, $A \cup B$.*

Exemple 12.10. *On lance un dé cubique et on considère les événements suivants :*

1. *A : « le chiffre apparut sur la face supérieure du dé est un multiple de 3 »*
2. *B : « le chiffre apparut sur la face supérieure du dé est un nombre pair »*
3. *C : « le chiffre apparut sur la face supérieure du dé est un multiple pair de 3 »*
4. *D : « le chiffre apparut sur la face supérieure du dé est un multiple de 3 ou un nombre pair »*

On a $A = \{3; 6\}$, $B = \{2; 4; 6\}$, $C = \{6\}$, $D = \{2; 3; 4; 6\}$ et $C = A \cap B$, $D = A \cup B$.

Définition 12.10 (Evénements incompatibles)**.** *Deux événements A et B d'un univers Ω sont dits incompatibles lorsque l'événement $A \cap B$ est impossible.*

Exemple 12.11. *On dispose d'une pièce de monnaie parfaitement équilibrée, on la lance 7 fois de suite et on note chaque fois le côté apparu.*
- *A : « il apparait trois fois face au cours des 7 lancés »*
- *« il apparait trois quatre face au cours des 7 lancés »*

Les événements A et B sont incompatibles.

Définition 12.11 (Evénements contraires)**.** *A est un événement d'un univers Ω. On appelle événement contraire de A l'ensembles des événements élémentaires de Ω qui ne sont pas dans A. On le note*

$$\bar{A} = \{\omega \in \Omega,\, \omega \notin A\} = C_{\Omega}^{A}.$$

Remarque 12.2. *Les événements A et $\bar{A}$ sont incompatibles, l'événement $A \cap \bar{A}$ est impossible et l'événement $A \cup \bar{A}$ est certain.*

12.3 Notion de probabilité

12.3.1 Introduction

Considérons le lancé d'une pièce de monnaie parfaitement symétrique. Il y a autant de chance d'apparition du côté "Pile" que du côté "Face". On dit que l'événement élémentaire "face" a une chance sur 2 d'apparition. On exprime cela en associant à l'événement "face" le nombre 1/2 et on dit que 1/2 est la probabilité de l'événement $\{face\}$ qu'on note $P(\{face\}) = 1/2$.

12.3.2 Probabilité d'un événement élémentaire

Définition 12.12. *Soit Ω un univers fini de cardinal $n \geq 1$. On peut écrire $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n\}$. A chaque événement élémentaire $\{\omega_i\}$, on associe $P : \{\omega_i\} \mapsto P(\{\omega_i\})$ vérifiant :*

1. $P(\{\omega_i\}) \geq 0$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$
2. $\sum\limits_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\}) = 1$.
3. $P(\varnothing) = 0$.

$P(\{\omega_i\})$ représente la probabilité de l'événement élémentaire $\{\omega_i\}$.

12.3.3 Probabilité d'un événement quelconque

Définition 12.13. *Soit Ω un univers fini de cardinal $n \geq 1$. A une partie non vide de Ω et $cardA = p$, $1 \leq p \leq n$. Si on pose $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, alors on définit la probabilité de A comme $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{p} P(a_i)$, où $P(a_i)$ est la probabilité de l'événement élémentaire a_i.*

Exemple 12.12. $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$. $P(\{a\}) = 2P(\{b\}) = 2P(\{c\}) = 4P(\{d\}) = 4P(\{d\})$. *Calculer les probabilités de chacun des événements suivants : $A = \{a, b\}$, $B = \{c, e\}$, $C = \{b, c, d\}$.*

On sait que : $P(a) + P(b) + P(c) + P(d) + P(e) = 1$, d'où $10P(e) = 1$ et $P(e) = \frac{1}{10}$. On en déduit $P(d) = \frac{1}{10}$, $P(c) = P(b) = \frac{1}{5}$ et $P(a) = \frac{2}{5}$.
On a ensuite :
$P(A) = P(a) + P(b) = \frac{3}{5}$, $P(B) = P(c) + P(e) = \frac{3}{10}$, $P(C) = P(b) + P(c) + P(d) = \frac{1}{2}$.

12.3.4 Probabilité uniforme

Définition 12.14. *Soit Ω une univers fini non vide de cardinal $n \geq 1$. On dit que la probabilité sur Ω est uniforme si les événements élémentaires de Ω ont la même probabilité $\frac{1}{n}$.*

Exemple 12.13.
- $\Omega = \{P, F\}$, $P(\{F\}) = P(\{P\}) = \frac{1}{2}$
- $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$.

Théorème 12.1. *Soit Ω une univers fini non vide, A une partie de Ω, si la probabilité est uniforme sur Ω, alors on a :*

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}.$$

Démonstration. Evidente. Pourra être prouvé en cours en fonction du niveau des élèves. □

12.4 Propriétés liées aux opérations sur les événements

12.4.1 Réunion d'événements incompatibles

Proposition 12.6. *Si $A \cap B = \varnothing$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.*

Démonstration. Si $A \cap B = \varnothing$, alors $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$, d'où

$$P(A \cup B) = \frac{card(A \cup B)}{card(\Omega)} = \frac{card(A)}{card(\Omega)} + \frac{card(B)}{card(\Omega)} = P(A) + P(B).$$

□

Corollaire 12.1. *Soit A_1, A_2,...,A_n n événements deux-à-deux incompatibles. Alors :*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

12.4.2 Probabilité d'événements contraires

Proposition 12.7. *Soit $A \subset \Omega$, $A \neq \varnothing$. Alors $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.*

Démonstration. Evidente. □

12.4.3 Réunion d'événement quelconques

Proposition 12.8. *Soit Ω un univers non vide, A et B deux parties de Ω telles que $A \cap B \neq \varnothing$. Alors :*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Exemple 12.14. *Une urne contient 6 boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 6. On tire au hasard une boule de l'urne et on note son numéro.*

1. *Quelle est la probabilité d'avoir un chiffre pair.*
2. *Quelle est la probabilité d'avoir un chiffre plus grand que 4.*

Solution $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

1. $A = \{2, 4, 6\}$, $cardA = 3$ donc $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
2. $B = \{5, 6\}$, $cardB = 2$ donc $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Exemple 12.15. *On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes comprenant quatre "couleurs" : les piques, les treffles, les carreaux et les coeurs. Chaque "couleur" est composée de huit cartes de la façon suivante : Un as, un roi, une dame, un valet, un 10, un 9, un 8 et un 7. Quelle est la probabilité de tirer un treffle ? un as ? la dame de coeur ? une carte rouge ? (le pique et le treffle sont noirs, le carreau et le coeur sont rouges).*

Solution $card\Omega = 32$, $cardR = 16$ $R =$ rouge, $cardN = 16$, $N =$ noire, $cardC = 8$, $C =$ carreau, $cardT = 8$, $T =$ treffle.

- $P(T) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$,
- $cardA = 4$ (A=as) donc $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$,
- $cardD_c = 1$ (D_c=damme de coeur) donc $P(D_c) = \frac{1}{32}$,
- $P(R) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$.

Exemple 12.16 (Tirage simultané)**.** *Un sac contient dix boules indiscernables au touché dont 6 rouges et 4 noires. On tire simultanément au hasard 3 boules du sac et on note leur couleur. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :*

- *A : « les trois boules contiennent au moins un rouge »*
- *B : « les trois boules contiennent au plus un rouge »*

Solution On a $card\Omega = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = 120$.

- $cardA = C_6^1 C_4^2 + C_6^2 C_4^1 + C_6^3 C_4^0 = 116$ donc $P(A) = \frac{116}{120} = \frac{29}{30}$.
- $cardB = C_4^3 C_6^0 + C_4^2 C_6^1 = 40$ donc $P(B) = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$.

Exemple 12.17 (Tirage successif avec remise)**.** *Un sac contient 8 boules indiscernables au touché dont 5 rouges et 3 noires. On tire au hasard une boule du sac, on note sa couleur, on la remet dans le sac. Puis, on tire au hasard une deuxième boule et on note sa couleur. Calculer la probabilité des événements suivants :*

1. *A : « les deux boules tirées sont de couleurs différentes »*
2. *B : « les deux boules tirées sont de la même couleur ».*

SolutionSoit Ω l'univers des possibles. $card\Omega = 8^2 = 64$.
- $cardA = 5^1 3^1 + 3^1 5^1 = 30$, $P(A) = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$.
- $carB = 5^2 + 3^2 = 34$. $P(B) = \frac{17}{32}$.

Exemple 12.18 (Tirage successif sans remise)**.** *Un sac contient* 8 *boules indiscernables au touché dont* 5 *rouges et* 3 *noires. On tire au hasard une boule du sac, on note sa couleur, on ne la remet pas dans le sac et on tire au hasard une deuxième boule et on note sa couleur. Calculer la probabilité des événements suivants :*

Solution $card\Omega = A_8^2 = 56$.
- $cardA = 2A_5^1 A_3^1 = 30$, $P(A) = \frac{15}{28}$.
- $cardB = A_5^2 + A_3^2 = 26$, $P(B) = \frac{13}{28}$.

Exposé 7 (Dé truqué-Dé pipé)**.**
1. Lancé d'un dé cubique truqué.
   On lance un dé cubique parfaitement équilibré dont une face est marquée a, deux faces sont marquées b et trois faces sont marquées c. Un tel dé est dit truqué. On note la lettre marquée sur la face supérieure du dé immobilisé. Quelle est la probalité pour que la face supérieure soit marquée a ? soit marquée b ? soit maequée c ?
2. Lancé d'un dé cubique pipé.
   On lance un dé cubique dont les 6 faces sont numérotées de 1 à 6 faces sont numérotés de 1 à 6. Le centre de gravité ne coincide pas avec son centre : on dit qu'il est pipé. Ce dé est tel que les événement élémentaires 1, 2, 3 ont la même probabilité. Cette probabilité étant le double de la probabilité de chacun des autres événements élémentaires. Quelle est la probabilité définie sur l'univers Ω de cette expérience aléatoire ? Quelle est la probabilité d'avoir un chiffre pair ?

12.5 Probabilités conditionnelles-Evénements indépendants

12.5.1 Probabilités conditionnelles (hors programme)

Définition 12.15. *Soit Ω l'univers des possibles d'une expérience aléatoire, B un événement de Ω tel que $P(B) \neq 0$. P étant la probabilité définie sur Ω. On appelle probabilité conditionnelle relative à B l'application P_B définie sur l'ensemble des parties de Ω $\mathcal{P}(\Omega)$ et à valeur dans $[0,1]$ par :*

$$\forall A \subset \Omega,\ P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

$P_B(A)$ se note aussi $P(A/B)$: probabilité de A sachant que B est réalisé.

Exemple 12.19. *Une classe de Tle est constituée de* 45 *élèves dont* 9 *filles et* 45 *garçons. On demande des volontaires pour former une équipe de football mixte. On obtient* 3 *filles et* 30 *garçons.*

1. *Parmi les* 45 *élèves, on choisit un ou une au hasard. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :*
   - *F : « l'élève choisie est une fille »*
   - *G : « l'élève choisi est un garçon »*
   - *V : « l'élève choisi(e) est un ou une volontaire »*

- *N : « l'élève choisi(e) est un ou une non volotaire »*
- *H : « l'élève choisie est une fille volontaire »*

2. *Parmi les élèves, on choisit une fille au hasard. Calculer la probabilité de l'événement « la fille choisie est une volontaire ».*

Solution

1. $card\Omega = 45$
   - $cardF = 9$, $P(F) = \frac{1}{5}$.
   - $cardG = 36$, $P(G) = \frac{4}{5}$.
   - $cardV = 33$, $P(V) = \frac{11}{15}$.
   - $cardN = 12$, $P(N) = \frac{4}{15}$.
   - $card(H) = 3$, $P(H) = \frac{1}{15}$.
2. $P(Q) = \frac{1}{3}$; ou encore $P(Q) = \frac{P(V \cap F)}{P(F)} = \frac{P(H)}{P(F)} = \frac{1}{3}$.

12.5.2 Evénements indépendants

Définition 12.16. *Soit P une probabilité définie sur un univers Ω. Deux événenments A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.*

Exemple 12.20.

Remarque 12.3. *Il ne faut pas confondre la notion d'événements indépendants et d'événements incompatibles. Deux événements peuvent être indépendants sans être incompatibles et inversément.*

12.6 Schéma de Bernoulli

Définition 12.17. *Une épreuve est dite de Bernoulli lorsqu'elle conduit à deux éventualités seulement appelées respectivement "succes" (S) et "echec" (E).*
Un schéma de Bernoulli est une expérience qui consiste à repéter n fois de façons indépendantes une épreuve de Bernoulli.

Exemple 12.21. *On lance simultanément deux dés. Soit l'événement A : « obtenir un double ». Le réalisation de A est un succès. La non réalisation de A est un échec. Si on répète l'expérience 5 fois de suites, ces lancés sont indépendants. L'expérience qui consiste à lancer 2 dés 5 fois de suite est un schéma de Bernoulli.*

Proposition 12.9. *Soit un schéma de Bernoulli à n épreuves où p est la probabilité du succès et $q = 1 - p$ la probabilité de l'échec. La probabilité d'obtenir exactement k succès avec $0 \leq k \leq n$ au cours des n épreuves est*

$$P_k = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Démonstration. A la suite de n épreuves, un résultat est un $n-$uplet de l'ensemble $\{S, E\}$ (c'est une partie à n éléments formée des événements S et E). Le nombre de ces parties ayant exactement k succes et $n - k$ échecs est C_n^k. Les n épreuves étant indépendantes, la probabilité d'un résultat est le produit des probabilités des évévenents élémentaires la constituant : comme on a k succes et $n - k$ échecs, alors la probabilité d'obtenir une partie ayant k succes est $p^k q^{n-k}$. On en déduit que $p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$. □

Exemple 12.22. *On lance trois fois de suite une pièce bien équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir*

1. *une fois face ?*

2. *au moins une fois face ?*

Solution La probabilité du succes $p = \frac{1}{2} = q$.

1. $P_1 = C_3^1 \frac{1}{2} \frac{1}{2^2} = \frac{3}{8}$.
2. Avoir au moins une fois face c'est avoir une fois face ou deux fois face ou trois fois face. D'où : $P = C_3^1 \frac{1}{2} \frac{1}{2^2} + C_3^2 \frac{1}{2^2} \frac{1}{2} + C_3^3 \frac{1}{2^3} \frac{1}{2^0} = \frac{7}{8}$.
   On pouvait aussi remarquer que les événements obtenir au moins une fois face et n'obtenir aucune fois face sont incompatible, auquel cas, $P = 1 - P_0 = 1 - C_3^0 \frac{1}{2^0} \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8}$.

12.7 Variables aléatoires

12.7.1 Notion de variable aléatoire

Définition 12.18. *On appelle variable aléatoire réelle sur un univers Ω, toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega_i \mapsto X(\omega_i) = x_i$.*

Exemple 12.23. *On lance deux fois de suite un décubique et on s'intéresse aux chiffres apparu sur la face supérieure du dé. L'univers des possibles est $\Omega = \{(i, j),\ 1 \leq i \leq 6,\ 1 \leq j \leq 6\}$. On définit alors l'application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $X(i, j) = i + j$. Par exemple $X(1, 2) = 1 + 2 = 3$. X est une variable aléatoire sur Ω.*

Vocabulaire

- ★ On note $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ les valeurs prises par X sur Ω et $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$
- ★ $[X = x_i]$ est l'événement « X prend la valeur x_i ».
- ★ $[X < x_i]$ est l'événement « X prend une valeur strictement inférieure à x_i »
- ★ $[a \leq X \leq b] = \{\omega \in \Omega,\ a \leq X(\Omega) \leq b\}$.

Exemple 12.24. *Dans l'exemple ci-dessus, on a :*

- $[X = 2] = \{(1, 1)\}$, $[X = 4] = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$.
- $[X < 5] = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$
- $[X < 13] = \Omega$.

On fera pour une meilleure compréhension un tableau à double entrée pour déterminer exactement Ω et les correspondances.

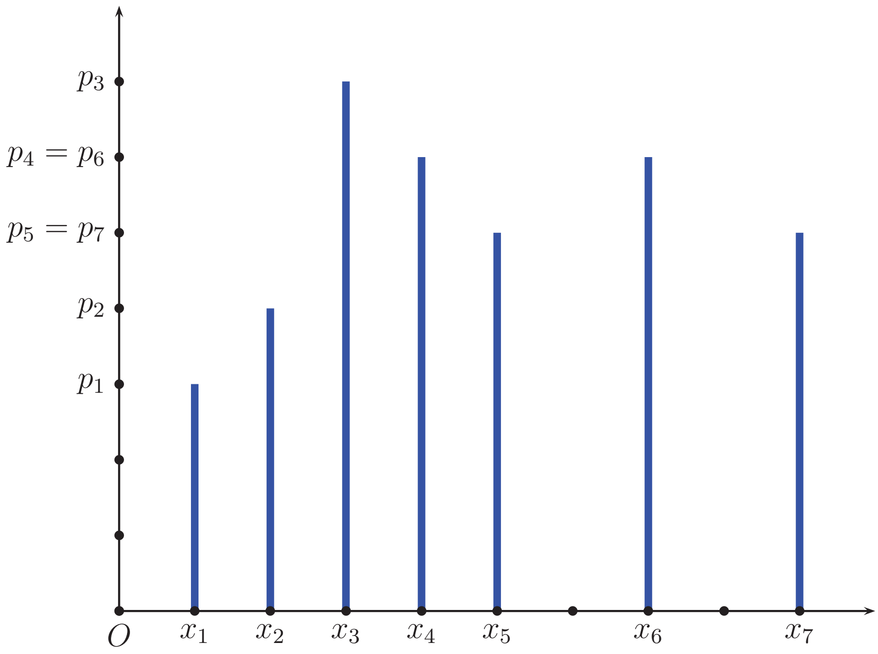
Définition 12.19 (Loi de probabilité)**.** *Soit P une probabilité définie sur un univers Ω. On appelle loi de probabilité d'une variable aléatoire X sur Ω l'application :*

$$\begin{array}{rccl} P_X : & X(\Omega) & \to & [0, 1] \\ & x_i & \mapsto & P_X(x_i) = P_i = P[X = x_i] \end{array}$$

Dans la pratique, on définit cette loi par un tableau de la façon suivante :

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_p	$\ldots$	x_n
P_i	P_1	P_2	$\ldots$	P_p	$\ldots$	P_n

On peut représenter ces résultats sur un diagramme en batôns de la façon suivante :



Exemple 12.25. *On lance deux dés tétraédriques différentiables dont les faces sont numérotées de* 1 *à* 4*. La variable aléatoire* X *étant la sommes des nombres obtenus. Définir la loi de probabilité de* X*.*

Solution On commence par déterminer l'univers des possibles Ω.

$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4).\}$

On a $card\Omega = 16$ et $X(\Omega) = \{2,3,4,5,6,7,8\}$. On construit un tabeau de la forme ci-dessous pour voir très rapidement les probabilités de chaque événement.

+	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

On définit alors la loi de probabilité P_X de la façon suivante :

$$P_X(2) = \frac{1}{16},\ P_X(3) = \frac{2}{16},\ P_X(4) = \frac{3}{16},\ P_X(5) = \frac{4}{16},\ P_X(6) = \frac{3}{16},\ P_X(7) = \frac{2}{16},\ P_X(8) = \frac{1}{16}.$$

On résume ce résultat dans le tableau suivant :

x_i	2	3	4	5	6	7	8
P_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

On fera pendant l'exposé le diagramme en bâton de cette loi de probabilité.

Définition 12.20 (Fonction de répartition)**.** *Soit* X *une variable aléatoire définie sur un univers* Ω *muni d'une probalite* P*. On appelle fonction de répartition de* X *l'application :*

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & P[X \leq x] \end{array}$$

La fonction de répartition F a les propriétés suivantes :

Proposition 12.10.
- *Si* $x < x_1$, $F(x) = P[X \leq x] = P(\varnothing) = 0$.
- *Si* $x_1 \leq x \leq x_2$, $F(x) = P[X = x_1] = P_1$.
- *Si* $x_2 \leq x \leq x_3$, $F(x) = P[X = x_1] + P[X = x_2] = P_1 + P_2$.

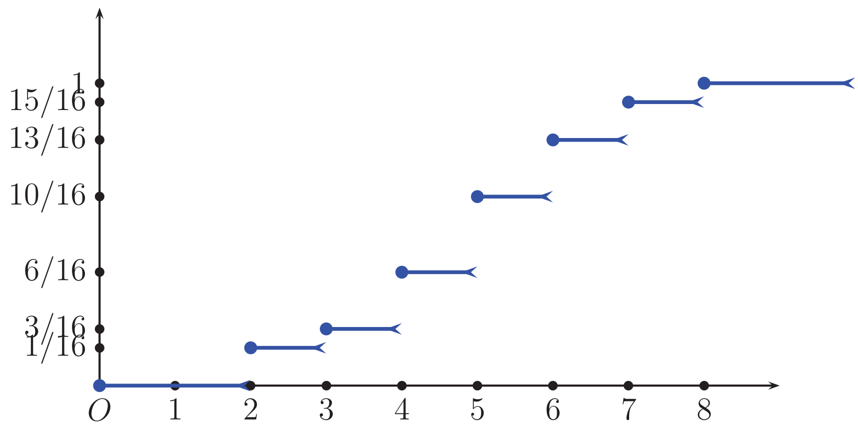
Exemple 12.26. *On reprend l'exemple ci-dessus :*

x_i	2	3	4	5	6	7	8
P_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

On définit alors la fonction de répartition de la façon suivante :

$$\begin{array}{lll}
Pour & 0 < x < 2 & F(x) = 0 \\
Pour & 2 < x < 3 & F(x) = \frac{1}{16} \\
Pour & 3 < x < 4 & F(x) = \frac{2}{16} \\
Pour & 4 < x < 5 & F(x) = \frac{6}{16} \\
Pour & 5 < x < 6 & F(x) = \frac{10}{16} \\
Pour & 6 < x < 7 & F(x) = \frac{13}{16} \\
Pour & 7 < x < 8 & F(x) = \frac{15}{16} \\
Pour & 8 < x & F(x) = 1.
\end{array}$$

On la représente graphiquement par un diagramme cumulatif.



12.7.2 Caractéristiques d'une variable aléatoire

Définition 12.21 (Espérence mathématique)**.** *Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ avec les probabilités P_1, P_2,…,P_n. On appelle espérence mathématique de X le nombre réel noté $E(X)$ et défini par*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i.$$

Exemple 12.27. *Si on reconsidère l'exemple précédent, on a*

x_i	2	3	4	5	6	7	8
P_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$
$P_i x_i$	$\frac{2}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{20}{16}$	$\frac{18}{16}$	$\frac{14}{16}$	$\frac{8}{16}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i = \frac{80}{16} = 5.$$

Définition 12.22 (Variance et écart type)**.** *Soit X une variance aléatoire prenant les valeurs $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ avec les probabilités P_1, P_2,...,P_n.*

1. *On appelle variance de X le réel noté $V(X)$ et défini par*

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x_i - E(X))^2$$

2. *On appelle écart type de X et on note σ la racine carrée de la variance. $\sigma = \sqrt{V(X)}$.*

Exemple 12.28. *Vérifier que dans l'exemple précédant, $V(x) = \frac{5}{2}$ et $\sigma = \frac{\sqrt{10}}{2}$.*

Proposition 12.11. *Soit X une v a r sur Ω. Alors $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.*

Démonstration. On a en effet :

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^{n} P_i(x_i - E(X))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} P_i(x_i^2 - 2x_i[E(X)] + [E(X)]^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P_i x_i^2 - 2[E(X)] \sum_{i=1}^{n} P_i x_i + [E(X)]^2 \sum_{i=1}^{n} P_i \\ &= E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 \end{aligned}$$

□

12.7.3 Cas de la loi binomiale

Soit une épreuve de Bernoulli de paramètre p probabilité du succes. Soit n le nombre d'essais. Soit

$$\begin{array}{rccl} P_k : & \{0, 1, \ldots n\} & \to & [0, 1] \\ & k & \mapsto & P[X = k] = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \end{array}$$

P_k est une loi de probabilité de la variable aléatoire X, X étant la loi binomiale de paramètre n, p notée $\mathcal{B}(n, p)$.

Proposition 12.12. *Pour une loi binomiale, on a*

$$E(X) = np, \qquad V(X) = npq = np(1-p).$$

Démonstration. Soit X une loi binomiale de paramètre n et p, on sait que $P_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. On se propose de simplifier la somme $E(X) = \sum_{k=1}^{n} P_k x_k = \sum_{k=1}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} x_k$. Comme pour tout k, $x_k = k$, on a $E(X) = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. On considère alors la fonction $f(t) = (pt+q)^n$ avec $q = 1-p$. Par la formule du binôme de Newton, on a $f(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pt)^k q^{n-k}$. En dédivant membre à membre cette expression on a

$$np(pt+q)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k p^k t^{k-1} q^{n-k}$$

Choisissant $t = 1$, on obtient $E(X) = np$.
On veut à présent établir que $V(X) = npq$.
On a montrer que $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ donc $V(X) = \sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} - [E(X)]^2$.
On a $(tf'(t))' = f'(t) + tf''(t)$, c'est-à-dire

$$np(pt+q)^{n-1} + n(n-1)p^2 t(pt+q)^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k p^k t^{k-1} q^{n-k}.$$

Pour $t = 1$, on a $np + n(n-1)p^2 = V(X) + (np)^2$ d'où $V(X) = np - np^2 = np(1-p)$. □

Exemple 12.29. *Soit quatre lancés successifs de deux dés. X étant le nombre de doubles obtenus au cours des quatres lancés. Déterminer sa loi de probabilité, son espérance mathématique et son écart type.*

X est une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{6} = \frac{6}{36}$. $P[X = k] = C_4^k \frac{1}{6^k} \left(\frac{5}{6}\right)^{4-k}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$. On a $P[X = 0] = \frac{625}{1296}$, $P[X = 1] = \frac{125}{324}$, $P[X = 2] = \frac{25}{216}$, $P[X = 3] = \frac{5}{324}$, $P[X = 4] = \frac{1}{1296}$. On a $E(X) = np = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $V(X) = npq = \frac{2}{3}\frac{5}{6} = \frac{5}{9}$, et $\sigma = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Exercice 12.1. *A faire : 4, 10, 11, 15, 17, 20, 22, 23, 28, 35, 37, 38, 42, 45.*