MINESEC
Lycée de Nkolnda–Nsimalen
Département de Mathématiques
www.easy-maths.org

Année scolaire : 2010-2011
Classe : T^{le} C **Durée : 4 heures**
Séquence II 18/11/2010
Coeff : 05

Épreuve de Mathématiques

Enseignant : **Romaric Tchapnga (PLEG)**

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE I — 4 points

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes : 0,75 pt + 0,75 pt + 0,5 pt

(a) : $2\ln x + \ln(2x-1) - \ln(5x+2) = 0$ (b) : $-8^x + 2\times 4^x + 2^x - 2 = 0$ (c) : $\dfrac{e^{2x-1}}{e^{5x}} < 5.$

2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n < 10^{-2}$. 0,5 pt

3. Etudier les branches infinies de la courbe représentative de la fonction g définie par :
$g(x) = -x^2 + \sqrt{x^2-9}$. 0,75 pt
Dresser son tableau de variation. 0,75 pt

EXERCICE II — 6 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On considère les points A, B, C et G du plan d'affixes respectives $z_A = -1$, $z_B = 2 + i\sqrt{3}$,
$z_C = 2 - i\sqrt{3}$ et $z_G = 3$.

1. Montrer que l'équation $z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = 0$ admet une solution réelle. 0,5 pt
Resoudre cette équation dans $\mathbb{C}$. 0,5 pt

2.
- **a.** Réaliser la figure et placer les points A, B, C et G. 0,5 pt
- **b.** Calculer les distances AB, AC, BC et donner la nature du triangle ABC. 0,75 pt
- **c.** Déterminer un argument du quotient $\dfrac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$ et
en déduire la nature du triangle GAC. 0,75 pt

3. Soit (Σ) l'ensemble des points M du plan tel que : $\left(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{CG} = 12.$
- **a.** Montrer que G est le barycentre du système $\{(A, -1) ; (B, 2) ; (C, 2)\}$. 0,5 pt
- **b.** Montrer que la relation $\left(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{CG} = 12.$ est équivalente à la relation : $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG} = -4$. 0,5 pt
- **c.** Vérifier que $A \in (\Sigma)$. 0,5 pt
- **d.** Montrer que $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG} = -4 \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG} = 0$. 0,5 pt
- **e.** Déterminer et contruire l'ensemble (Σ). 0,75 pt
- **f.** Déterminer et construire l'ensemble (D) des points M du plan tel que :
$2MA^2 - MB^2 - MC^2 = -2$. 0,75 pt

PROBLEME. **10 points**

Les parties A, B et C sont indépendantes

Partie A.

Soient u et f deux fonctions définies sur $]0\ ;\ +\infty[$ par
$u(x) = x^2 - 2 + \ln x$ et $f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$.

1. Étudier les variations de u sur $]0\ ;\ +\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$. 0,75 pt
2. **a.** Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0\ ;\ +\infty[$. 0,75 pt

   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α. 0,25 pt
3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x. 0,5 pt
4. Montrer l'égalité : $\ln\alpha = 2 - \alpha^2$. 0,5 pt
5. Exprimer, pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$. 0,5 pt
6. En déduire les variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$. 0,5 pt

Partie B.

On définit la fontion numérique h de la variable réelle x par
$h(x) = \ln(\sqrt{1 + e^{2x}} - 1)$. On désigne par (C) la courbe représentative de h dans un repère orthonormé du plan.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 2x - \ln(\sqrt{1 + e^{2x}} + 1)$ et $h(x) = x + \ln(\sqrt{1 + e^{-2x}} - e^{-x})$. 0,75 pt
2. Montrer que (C) admet deux asymptotes obliques (D) et (D') sécantes en $\Omega(\ln 2\ ;\ \ln 2)$. 0,75 pt
3. Dresser le tableau de variations de h. 0,75 pt
4. Montrer que h est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et exprimer $h^{-1}(x)$ en fonction de x. 0,75 pt

Partie C.

1. Pour $a = 2$ puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1 \mod 7$. 0,5 pt
2. Soit a un entier naturel non divisible par 7.

   a. Montrer que : $a^6 \equiv 1 \mod 7$. 0,5 pt

   b. On appelle *ordre* de $a \mod 7$, et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \mod 7$.
   Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \mod 7$. 0,75 pt
   En déduire que k divise 6. Quelles sont les valeurs possibles de k ? 0,75 pt

   c. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6. 0,75 pt
3. Soit n un entier naturel , on pose $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$.
   Montrer que $A_{2006} \equiv 6 \mod 7$. 0,5 pt