MINESEC
Lycée de Nkolnda–Nsimalen
Département de Mathématiques
www.easy-maths.org

Année scolaire : 2010-2011
Classe : T^{le} D **Durée : 4 heures**
Séquence II 18/11/2010
Coeff : 04

Épreuve de Mathématiques

Enseignant : **Romaric Tchapnga (PLEG)**

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE I **6 points**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes : 0,75 pt + 0,75 pt + 0,5 pt

(a) : $2\ln x + \ln(2x-1) - \ln(5x+2) = 0$ (b) : $-8^x + 2\times 4^x + 2^x - 2 = 0$ (c) : $\dfrac{e^{2x-1}}{e^{5x}} < 5.$

2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n < 10^{-2}$. 0,75 pt

3. Etudier les branches infinies de la courbe représentative de la fonction g définie par :
$g(x) = -x^2 + \sqrt{x^2-9}$. 0,75 pt
Dresser son tableau de variation. 0,75 pt

4. Calculer les limites suivantes : 3× 0,5 pt = 1,5 pt

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2+1} + \frac{x}{x-3}\ ; \qquad \lim_{x\to 1} 2x - |x-1|\ln|x-1|\ ; \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+5x-1}+2x\right)$$

EXERCICE II **5,5 points**

1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points
– A d'affixe $z_A = a$, $(a \in \mathbb{R})$, B d'affixe $z_B = b + i$, $(b \in \mathbb{R})$
– C image de B dans la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

a. Exprimer z_C affixe du point C en fonction de a et de b. 0,75 pt

b. Déterminer une relation entre a et b pour que le point C appartienne à l'axe $\left(O\ ;\ \overrightarrow{v}\right)$. 0,75 pt

c. Dans ce cas, exprimer alors l'affixe du point C en fonction de a. 0,5 pt

2. Dans cette question, on pose $a = \sqrt{3}$ et $b = 0$. On considère les points C d'affixe $z_C = -i$ et D d'affixe $z_D = 2 + \sqrt{3} - 2i\sqrt{3}$.

a. Quelle est la nature du triangle ABC ? 0,75 pt

b. Calculer le quotient $\dfrac{z_D - z_A}{z_C - z_A}$. En déduire la nature du triangle ACD. 0,75 pt

c. Déterminer l'affixe du point E image de D dans la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. 0,75 pt

d. Déterminer l'affixe du point F image de D dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. 0,5 pt

e. Déterminer la nature du triangle BEF. 0,75 pt

PROBLEME. **8,5 points**

Les parties A, B et C sont indépendantes

Partie A. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 2 + \mathrm{e}^x$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. 0,25 pt
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variation de f. 1,25 pt
3. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0\,;\,1[$. 1 pt

   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α. 0,5 pt
4. Etudier les branches infinies de la courbe représentative de la fonction f. 0,75 pt

Partie B.

Soit le nombre complexe $\alpha = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1. Calculer α^2 et α^4. 1 pt
2. Calculer le module et un argument de α^4. 0,75 pt
3. On considère un plan P muni d'un repère orthonormé. A tout point M de coordonnées (x, y), on associe son affixe $z = x + iy$. Déterminer l'ensemble des points M de P pour lesquels le module du produit αz est égal à 8. 0,75 pt

Partie C.

On considère la fonction h définie par : $h(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h. 0,75 pt
2. Montrer que la fonction h est prolongeable par continuité en 2. 0,75 pt
3. Déterminer le prolongement par continuité de h en 2. 0,75 pt