MINISTERE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
DELEGATION PROVINCIALE DU CENTRE
DELEGATION DEPARTEMENTALE DU MFOUNDI
LYCEE DE BIYEM-ASSI
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

DEVOIR DE MATHEMATIQUES
5eme SEQUENCE
CLASSE Tle C DUREE 4H
EXAMINATEUR : TAGNE TATSINKOU J.F

L'épreuve comporte trois exercices et un problème, la qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures sera pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

EXERCICE I (3pts)

ABCD désigne un rectangle dans le plan orienté. On donne *AD=BC=a* et *AB=CD=2a*. On suppose $(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit *r* la rotation de centre *O* et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et *t* la translation de vecteur $\frac{1}{4}\vec{AB}$.

1) Dessiner le rectangle *ABCD* et son image *A'B'C'D'* par l'application *f=tor*. Prendre *a=4cm* **1,5pts.**
2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de *f* **1,5pts.**

EXERCICE II (3pts)

Dans le plan *(P)* muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$. On donne le point $A(12,18)$ on désigne par B le point de l'axe $(o, \vec{i})$ et par *C* le point de l'axe $(o, \vec{j})$ tel que $(\vec{AB}, \vec{AC}) = -\frac{\pi}{2}$. On appelle *x* l'abscisse de *B* et *y* l'ordonnée de *C*.

1) Démontrer que le couple (x, y) est solution de l'équation $(E): 2x+3y=78$ **0.75pt.**
2) On se propose de trouver tous les couples (B,C) de points ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.
   a) Montrer que l'on est ramené à l'équation *(E)* avec $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ **0.25pt.**
   b) A partir de la définition de *B* et *C*, trouver une solution particulière (X_0, Y_0) de *(E)* avec $(X_0, Y_0) \in \mathbb{Z}^2$. **0.5pt.**
   c) Démontrer qu'un couple $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ est solution de *(E)* si et seulement si il est de la forme $(12+3k, 18-2k)$ *où* $k \in \mathbb{Z}$. **0.75pt.**
   d) Combien y a-t-il de couples de points (B, C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs tels que $-6 \leq x \leq 21$ et $-5 \leq y \leq 14$ **0.75pt.**

EXERCICE III (4pts)

Dans le plan *(P)* muni d'un repère orthonormée $(o, \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'ensemble *(E)* des points M(x, y) vérifiant la relation $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}(x+y-4)^2$ (i).

1) a) Soit $M(x_0, y_0)$; Calculer la distance du point *M* au point *A (1,1)* et la distance du point *M* à la droite d'équation *x+y-4=0*. **0.5pt**
   b) Déduire que *(E)* est une conique dont on précisera un foyer *F*, la directrice associé *(D)* et l'excentricité *e*. **0.75pt**
2) a) Montrer que l'égalité (i) est équivalente à $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 8 = 0$. **0.25pt**
   b) Montrer que le point *O* est centre de *(E)* et préciser l'autre foyer *F'* ainsi que la directrice associé*(D')*. **0.5pt**
   c) Déterminer une équation de l'axe focal *(FF')* et du petit axe (D_1). **0.75pt**

d) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de *(E)* et de ces axes. Construire *(E)*. **1.25pts**

PROBLEME (10pts)

Soit *f* la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=x\ln(\frac{x+2}{x})+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\ si\ x>0\ et\ f(0)=\frac{1}{2}$. On désigne par *(C)* la courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ (unité 1 cm)

1) soit *g* la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=\ln(x+2)-\ln x-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{4}$.

a) Donner le sens de variation de la fonction *g,* calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et en déduire le signe de g. **0.25×3pt**

b) Montrer que $\forall x\in[2,3]$, $g(x)<\frac{1}{2}$ **0.25pt**

2) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(\frac{x+2}{x})$ puis $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$. **0.25 ×2pt**

b) Etudier la dérivabilité de *f* en *0* et donner une interprétation graphique du résultat. **0.5+0.25pt**

c) Etudier les variations de *f.* **1pt**

d) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=\frac{x}{4}+\frac{5}{2}$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$ et tracer (Δ) et (C) dans le repère $(o,\vec{i},\vec{j})$. **1.25pts**

3) Soit $I=[2,3]$ et h la fonction définie sur I par : $h(x)=f(x)-x$.

a) Montrer que $\forall x\in I, h'(x)<0$ et déduire le sens de variation de h. **0.5pt**

b) Démontrer que l'équation h(x)=0 admet une unique solution $\alpha\in I$. **0.5pt**

4) a) Montrer que $\forall x\in I, 0<f'(x)<\frac{1}{2}$. **0.25pt**

b) En déduire que $\forall x\in I, |f(x)-f(\alpha)|\leq\frac{1}{2}|x-\alpha|$ **0.5pt**

5) Soit (U_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0=2;\ et\ \forall n\in\mathbb{N}, U_{n+1}=f(U_n)$.

a) Démontrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, U_n\in I$. **0.5pt**

b) Etablir que :

i) $\forall n\in\mathbb{N}, |U_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|U_n-\alpha|$. **0.5pt**

ii) $\forall n\in\mathbb{N}, |U_n-\alpha|\leq(\frac{1}{2})^n$ **0.5pt**

c) En déduire que la suite (U_n) converge et déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$. **0.5pt**

d) Déterminer l'entier naturel *P* tel que U_p Soit une valeur approchée de $\alpha\ à\ 10^{-3}\ près$. Et en déduire une approximation de $\alpha\ à\ 10^{-3}\ près$ **0.75pt**

e) Calculer l'aire du domaine D défini par $D=\left\{M(x,y)/1\leq x\leq e\ et\ f(x)\leq y\leq\frac{x}{4}+\frac{5}{2}\right\}$ **1pt**