Épreuve de Mathématiques

Enseignant : **Romaric Tchapnga**

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE I **2,5 points**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ en utilisant le pivot de Gauss le système (Σ) $\begin{cases} x-2y-z=5 \\ 2x+4y+z=-20 \\ 4x+2y+z=-20 \end{cases}$. **1,5 pt**
2. Le plan est muni du repère orthonormée $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On considère les points $A(-1,\ 2)$, $B(2,\ 4)$ et $C(4,\ 2)$.
Déterminer les nombres a, b et c pour que le cercle d'équation : $x^2+y^2+ax+by+c=0$ soit circonscrit au triangle ABC. **1 pt**

EXERCICE II **6,5 points**

I - Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, l'unité graphique étant 4 cm.

On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A=1$; $z_B=e^{i\frac{\pi}{12}}$.
Soit f la transformation du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z', tel que $z'=e^{i\frac{\pi}{12}}z$. Le point C est l'image du point B par f.

1. Donner la nature de la transformation f. **0,5 pt**
2. **a.** Calculer l'affixe z_C du point C sous forme exponentielle puis sous forme algébrique. **1 pt**
   b. Soit I le milieu du segment [AC] . Calculer l' affixe du point I. **0,5 pt**
   c. Faire une figure. **0,5 pt**
3. **a.** Prouver que les droites (OI) et (OB) sont confondues. **0,5 pt**
   b. Écrire sous forme trigonométrique l'affixe de I. **0,5 pt**
   c. Déterminer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (les valeurs exactes sont exigées), sachant que $\sqrt{4\sqrt{3}+8}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$. **1, pt**

II - Soit z un nombre complexe distinct de 4. Soit Z un nombre complexe tel que $Z=\dfrac{iz-4}{z-4}$.
On note A le point d'affixe 4.

1. On pose $z=x+iy$. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y. **1 pt**
2. Déterminer l'ensemble (C) des points M(z) tel que Z soit réel. Reconnaître la nature de (C) et caractériser cet ensemble. **0,5 pt**

3. Déterminer l'ensemble (D) des points M(z) tel que Z soit imaginaire pur. **0,5 pt**

EXERCICE III **2,5 points**

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{0\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

   a. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$. **0,75 pt**

   b. Démontrer par recurrence que pout tout entier naturel $n \geq 2$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. **1 pt**

2. Démontrer par recurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots \; \ldots\ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$. **0,75 pt**

PROBLEME **8,5 points**

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

1. Écrire 1203 dans le système de numération de base 11. **0,5 pt**
2. Déterminer le reste de la division de 2^{2009} par 7. **0,5 pt**
3. Un nombre N s'écrit $N = \overline{x4y}^{12}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est divisible par 33. **1pt**

Partie B

1. On considère l'équation (1) : $11n - 24m = 1$ d'inconnue $(n\,;\,m)$ élément de $\mathbb{Z}^2$.

   a. Expliquer pourquoi cette équation admet au moins une solution. **0,25 pt**

   b. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1). **0,75 pt**

   c. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1). **0,75 pt**

2. Recherche du PGCD de $10^{11}-1$ et $10^{24}-1$.

   a. Montrer que 9 divise $10^{11}-1$ et $10^{24}-1$. **1 pt**

   b. $(n\,;\,m)$ désignant un couple quelconque d'entiers naturels solution de (1).
   Montrer que l'on peut écrire $\left(10^{11n}-1\right) - 10\left(10^{24m}-1\right) = 9$. **0,5 pt**

   c. Montrer que $10^{11}-1$ divise $10^{11n}-1$. **0,5 pt**
   On rappelle l'égalité $a^n - 1 = (a-1)\left(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a^1+a^0\right)$, valable pour tout entier naturel non nul n.
   Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers x et y
   tel que $\left(10^{11}-1\right)x - \left(10^{24}-1\right)y = 9$. **0,5 pt**

   d. Montrer que tout diviseur commun à $10^{24}-1$ et $10^{11}-1$ divise 9. **0,75 pt**

   e. Déduire des questions précédentes le PGCD de $10^{24}-1$ et $10^{11}-1$. **0,5 pt**