Easy-Maths

Njionou Patrick, S
pnjionou@yahoo.fr
Lycée de Japoma
BP : 7297, Douala, Cameroun
www.easy-maths.org

Théorème des accroissements finis et suites numériques

EXERCICE 1

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \left(3\mathrm{e}^{x} - x - 4\right)\mathrm{e}^{3x}.$$

On admet qu'il existe un nombre réel a et un seul dans l'intervalle $I = [0\ ;\ 1]$ tel que $h(a) = 0$.

1. Justifier que, dans l'intervalle I, l'équation $h(x) = 0$ est équivalente à l'équation $3\mathrm{e}^{x} - x - 4 = 0$ puis à l'équation $x = \ln\left(\dfrac{x+4}{3}\right)$.
2. On considère la fonction φ définie sur l'intervalle I par $\varphi(x) = \ln\left(\dfrac{x+4}{3}\right)$.
   (a) Montrer que, pour tout $x \in I$, $\varphi(x) \in I$.
   (b) Montrer que, pour tout $x \in I$, $\left|\varphi'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{4}$.
   (c) Calculer $\varphi(a)$.
3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - a| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - a|$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - a| \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n}$.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Préciser sa limite.
   (d) Déterminer un nombre entier naturel p tel que u_p soit une valeur approchée de a à 10^{-4} près. Donner une valeur approchée de u_p à 10^{-4}.

EXERCICE 2(Pondichéry mai 1999)

On considère la fonction h définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = x\mathrm{e}^{x} - 2\mathrm{e}^{x} + 2$.

1. Déterminer les variations de h (on précisera $h(0)$ mais la limite en $+\infty$ n'est pas demandée).
2. Déterminer le signe de $h\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

   En déduire qu'il existe un unique réel $a \in \left[\dfrac{3}{2}\ ;\ 2\right]$ tel que $h(a)=0$.

   En déduire le signe de h sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Démontrer que, sur $[0\ ;\ +\infty[$, l'équation $h(x)=0$ équivaut à
   $$2\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)=x.$$
4. Soit la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par
   $$g(x)=2\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right).$$
   On pose $I=\left[\dfrac{3}{2}\ ;\ 2\right]$. Montrer que, pour tout x de l'intervalle I, $|g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
5. Soit la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par
   $$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \dfrac{3}{2} \\ x_{n+1} & = & g(x_n) \end{array}\right. \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 1.$$
   Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, x_n appartient à I.
6. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :
   $$|x_{n+1}-a| \leqslant \frac{1}{2}|x_n-a|$$
   $$\text{et} \quad |x_n-a| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$
   En déduire que la suite (x_n) converge vers a.
7. Déterminer un entier p tel que x_p soit une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre réel a. Donner une valeur approchée de x_p avec trois décimales.

EXERCICE 3(Polynésie juin 1999)

On considère les fonctions f et g, définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-\mathrm{e}^{2x-2}$ et $g(x)=\mathrm{e}^{2x-2}$. On définit ensuite dans $\mathbb{R}$ la suite (u_n) par :
$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \mathrm{e}^{2u_n-2} \end{array}\right.$$

1. Etudier les variations de f et donner son tableau de variations.
2. On note I l'intervalle $[0;0,5]$. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans l'intervalle I une unique solution qu'on notera a.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $g(x) = x$. En déduire $g(a)$.
4. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I, on a :

$$|g'(x)| \leqslant \frac{2}{\mathrm{e}}.$$

5. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I, $g(x)$ appartient à I.
6. Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour démontrer que, pour tout entier naturel n : $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \frac{2}{\mathrm{e}}|u_n - a|$.
7. Démontrer, par récurrence, que : $|u_n - a| \leqslant \left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^n$.
8. En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
9. Déterminer un entier naturel p tel que : $\left|u_p - a\right| < 10^{-5}$.
10. En déduire une valeur approchée de a à 10^{-5} près : on expliquera l'algorithme utilisé sur la calculatrice.

EXERCICE 4(Nouvelle-Calédonie décembre 1999)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{2x}$.

1. Étudier la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.
2. Soit x un nombre réel. Calculer $f'(x)$.
   Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
   Préciser le signe de $f(x)$ pour tout réel x.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $[0,2;0,3]$.
4. Démontrer que x_0 satisfait à la relation : $x_0 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{x_0+1}\right)$.
5. Soit h la fonction définie sur I = [0,2 ; 0,3] par

$$h(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{x+1}\right).$$

   (a) Démontrer que pour tout x de I, $h(x)$ appartient à I.
   (b) Démontrer que pour tout x de I, $|h'(x)| \leqslant 0,42$.
6. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0,2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = h(u_n)$.
   (a) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - x_0| \leqslant 0,42|u_n - x_0|$.
   À l'aide d'un raisonnement par récurrence, déduire que, pour tout entier naturel n on a : $|u_n - x_0| \leqslant 0,1 \times (0,42)^n$.
   (b) Déterminer la limite de (u_n) .
   (c) Déterminer un entier p tel que $|u_p - x_0| \leqslant 10^{-5}$.

EXERCICE 5(Polynésie septembre 2000)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x + 1 - x\mathrm{e}^{x-1}.$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier la limite de la fonction f en $-\infty$ puis en $-\infty$ (on pourra écrire $x\mathrm{e}^{x-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}x\mathrm{e}^{x}$).
2. (a) Calculer la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f.
   (b) Dresser le tableau de variation de la fonction f' en précisant la limite de la fonction f' en $-\infty$.
   (c) Calculer $f'(1)$ et en déduire le signe de f' pour tout réel x.
   (d) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3. Soit I l'intervalle $[1,9;2]$. Démontrer que, sur I, l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique, α.
4. On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par :

$$g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right).$$

   (a) Démontrer que, sur I, l'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $g(x) = x$.
   (b) Étudier le sens de variation de la fonction g sur I et démontrer que, pour tout x appartenant à I, $g(x)$ appartient à I.
   (c) Démontrer que, pour tout x de l'intervalle I, $|g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{9}$.
   (d) Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n).$$

      i. Démontrer que tous les termes de cette suite appartiennent à l'intervalle I.
      ii. Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{9}|u_n - \alpha|$.
      iii. En déduire, en raisonnant par récurrence, que :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{1}{10}.$$

      iv. En déduire que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

EXERCICE 6 (Asie juin 2001)

On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}$.

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. (a) Calculer la limite de cette fonction lorsque x tend vers $+\ \infty$.

(b) Calculer la limite de cette fonction lorsque x tend vers - 1.
Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C})$?

2. Calculer $f'(x)$ et montrer que son signe est celui de $\dfrac{x-1}{x+1}$.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$, les droites d'équations respectives $x=-1$ et $y=1$, ainsi que la tangente à cette courbe en son point d'abscisse 0 (unité graphique : 4 cm).
5. Montrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[1\,;\,10]$.
Utiliser le graphique précédent pour donner deux nombres entiers consécutifs a et b tels que α appartient à l'intervalle $[a\,;\,b]$.
6. Montrer que l'équation $f(x)=x$ a une unique solution β et que celle-ci est élément de l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$.
Soit h la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+x)^3}$.
   (a) i. Vérifier que, pour tout x appartenant à $]-1,+\infty[$ on a : $f'(x)=f(x)-2h(x)$.
   ii. Calculer $h'(x)$.
   iii. En utilisant la question **i**, calculer $f''(x)$.
   En déduire le sens de variation de f dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$
   En déduire que, pour tout x appartenant à $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$ on a :
   $$\left|f'(x)\right|\leqslant\frac{1}{4}.$$
   (b) On définit la suite (U_n), pour tout nombre entier naturel n, par $\mathrm{U}_0=1$ et $\mathrm{U}_{n+1}=f(\mathrm{U}_n)$ pour $n\geqslant 0$. On admet que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $\dfrac{1}{2}\leqslant \mathrm{U}_n\leqslant 1$.
   i. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a :
   $$\left|\mathrm{U}_{n+1}-\beta\right|\leqslant\frac{1}{4}\left|\mathrm{U}_n-\beta\right|.$$
   ii. Montrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a :
   $$\left|\mathrm{U}_n-\beta\right|\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^n.$$
   iii. En déduire une valeur approchée numérique de β à 10^{-3} près.

EXERCICE 7 (Nouvelle-Calédonie novembre 2002)

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. (Unités graphiques : 2 cm).

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (3+x)e^{-\frac{x}{2}}.$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$, puis en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.
3. Construire la courbe (Γ) représentative de f dans $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
4. (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 3$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.
   Soit α la solution non nulle, montrer que : $-2 < \alpha < -\dfrac{3}{2}$.
   (b) Plus généralement, déterminer **graphiquement** suivant les valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Partie B

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 3e^{\frac{x}{2}} - 3$.

1. Démontrer que $f(x) = 3$ si et seulement si $\varphi(x) = x$.
2. Soit φ' et $\varphi''(x)$ les dérivées première et seconde de la fonction φ.
   (a) Calculer, pour tout réel x, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$. Justifier que $\varphi'(\alpha) = \dfrac{\alpha+3}{2}$.
   (b) Étudier le sens de variation de φ', puis celui de φ.
   (c) On se place désormais dans l'intervalle $I = [-2\ ;\ \alpha]$.
3. Montrer que, pour tout x appartenant I ;
   (a) $\varphi(x)$ appartient I.
   (b) $\dfrac{1}{2} \leqslant \varphi'(x) \leqslant \dfrac{3}{4}$
   (c) En déduire, à l'aide d'une intégration, que pour tout x de l'intervalle I, on a :
   $$0 \leqslant \frac{1}{2}(\alpha - x) \leqslant \varphi(\alpha) - \varphi(x) \leqslant \frac{3}{4}(\alpha - x).$$
4. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & -2 \\ u_{n+1} & = & \varphi(u_{n-1}) \end{array}\right.$$
   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier n, u_n appartient à l'intervalle I.
   (b) Justifier que, pour tout entier n,
   $$0 \leqslant \alpha - u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4}(\alpha - u_n) \qquad \text{puis que} \qquad 0 \leqslant \alpha - u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

(c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

(d) Déterminer le plus petit entier p tel que : $\left(\dfrac{3}{4}\right)^p \leqslant 10^{-2}$.

Donner une approximation décimale 10^{-2} près de u_p, à l'aide d'une calculatrice, puis une valeur approchée de α à 2×10^{-2} près.

EXERCICE 8

Le but de l'exercice est démontrer que l'équation (E) : $e^x = \dfrac{1}{x}$, admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et de construire une suite qui converge vers cette unique solution.

I. Existence et unicité de la solution

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - e^{-x}.$$

1. Démontrer que x est solution de l'équation (E) si et seulement si $f(x) = 0$.
2. Étude du signe de la fonction f.
   (a) Étudier le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.
   (c) Démontrer que appartient α à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$.
   (d) Étudier le signe de f sur l'intervalle $[0 ; \alpha]$.

II. Deuxième approche

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}.$$

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.
2. En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.
3. Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0 ; \alpha]$.

III. Construction d'une suite de réels ayant pour limite

On considérera la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
3. Justifier l'égalité : $g(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ.
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_4 arrondie à la sixième décimale.