Lycée de Bepanda
Département de Mathématiques — Année scolaire : 2009/2010

Classe : $T^{le}C$ Durée : 4h ; coef : 5

Epreuve de Mathématiques. 4^{eme} séquence

L'épreuve comporte deux exercices et un problème à deux parties I et II.

Exercice 1 (4,5pts).

Le plan complexe est muni du repère orthonormal $(O,\, \vec{u},\, \vec{v})$. u est le nombre complexe $-\frac{1}{2}(1+i)$. On construis la suite A_n de la façon suivante : $A_0 = 0;$ A_1 est le nombre complexe d'affixe i puis pour tout entier naturel $n \geq 2$, A_n est l'image de A_{n-2} par la similitude directe de centre A_{n-1} de rapport $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{5\pi}{4}$. On note Z_n ml'affixe du point A_n.

1. (a) Démontrer que pour tout $n \geq 2$, $Z_n - Z_{n-1} = u(Z_{n-2} - Z_{n-1})$ (1) [0,5pt]
   (b) Démontrer à partir de (1) par récurrence que $Z_n - Z_{n-1} = (-u)^{n-1}.i$ (2) [0,5pt]
   (c) Déduire de (2) que $\forall n \geq 2 (n \in \mathbb{N}),\ \ Z_n = \dfrac{i(1-(-u)^n)}{1+u}$. [0,5pt]
   (d) Montrer que $Z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ [0,5pt]
2. S est la similitude direct qui transforme A_0 en A_1 et A_1 en A_2. [0,5pt]
   (a) Montrer que S est unique. [0,5pt]
   (b) Déterminer l'écriture complexe de S et en déduire tous ses éléments caractéristiques.[1pt]
3. On pose $S_4 = SOSOSOS$.
   (a) Donner l'écriture complexe de S_4 et en déduire sa nature . [0,5pt]
   (b) Montrer par récurrence que $\forall n \geq 2 (n \in \mathbb{N})\ \Omega,\ A_n,\ A_{n+1}$ sont alignés (Ici, Ω est le centre de S). [0,5pt]

Exercice 2 (4,5pts).

a est un réel strictement positif, f_a est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f_a(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2+a^2}{x}\right)$ et $(\mathcal{C}_a)$ sa courbe représentative sur la plan muni du repère orthonormal $(O,\, I,\, J)$ d'unité $2\,cm$.

1. Etudier en fonction de a les variations de la fonction f_a. [1pt]
2. On note h l'homothétie de centre O et de rapport a qui transfome $M(x; y)$ en $M'(x'; y')$
   (a) Donner l'expression analytique de h. [0,5pt]
   (b) Démontrer que la courbe $(\mathcal{C}_a)$ est l'image de $(\mathcal{C}_1)$ par h. [0,5pt]
3. On note g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ et on considère la suite x_n définie par :$x_0 = 2,\ x_1 = g(x_0)$ et pour tout n supérieur ou égal à 1, $x_n = g(x_{n-1})$.
   (a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n > 1$. [0,5pt]
   (b) On pose $x_n = 1 + \frac{1}{U_n}$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = 2U_n(1+U_n)$. [0,25pt]
   (c) Prouver par récurrence que : pour tout $n \geq 1$
      i. U_n est un entier positif. [0,25pt]

ii. U_n est divisible par 2^{n+1} et non par 2^{n+2}. [0,5pt]

(d) Déduire que 1 est le seul reste de la division euclidienne de U_n par 3. [0,5pt]

(e) Démontrer que :pour tout $n \geq 2$, U_n est divisible par 5 et non par 25. [0,5pt]

PROBLEME(11pts)

$I-$ (Γ_m) est l'ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) pour tout m un nombre réel,

$$(2-m)x^2 + m^2y^2 + 2(2-m)x - (2-m)(m^2-1) = 0.$$

1. Déterminer les valeurs de m pourque (Γ_m) existe. [0,25pt]
2. Dans la suite de l'exercice (Γ_m) existe.
   (a) Pour quelles valeurs de m (Γ_m) est-il un cercle ? [0,25pt]
   (b) On suppose par la suite que (Γ_m) n'est pas un cercle. Donner l'équation réduite de (Γ_m). [0,5pt]
3. On suppose que (Γ_m) a pour équation réduite $\dfrac{(x+1)^2}{m^2} + \dfrac{y^2}{2-m} = 1$
   (a) Pour quelles valeurs de m (Γ_m) est-elle :
      i. Une parabole ? [0,25pt]
      ii. Un ellipse ? [0,25pt]
      iii. Une hyperbole ? [0,25pt]
   (b) On pose $m = 3$. Déterminer pour (Γ_3)
      i. L'excentricité . [0,25pt]
      ii. Les coordonnées de ses foyers F et F' dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ puis dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ tel que $\Omega(-1; 0)$. [0,5pt]
      iii. Construire (Γ_3) et ses asymptotes. [0,5pt]

$II-$ '

Partie A

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}e^{1-x}$. Elle est dérivable sur $]0; +\infty[$. On note f' sa dérivée et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rappoté à un repère orthonormal (O, I, J).

1. Démontrer que la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$ est $+\infty$. [0,5pt]
2. Démontrer que la limite de f en $+\infty$ est 0; puis interpréter graphiquement le résultat. [0,5pt]
3. Pour tout x de $]0; +\infty[$, calculer $f'(x)$. [0,5pt]
4. Déduire des questions précédentes le tableau de variation de f. [0,25pt]
5. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.(Unité de graphique : $2cm$) [1pt]

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \int_n^{n+1} f(t)dt$.

1. Interpréter géometriquement u_n. [0,25pt]
2. Montrer que si $n \leq t \leq n+1$, on a $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$ et en déduire que pour tout entier naturel n non nul,$f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$. [0,75pt]
3. En déduire que la suite (u_n) est décroissante. [0,25pt]
4. Prouver la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite. [0,5pt]

Partie C

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie sur $[1; +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

1. (a) Montrer que F est dérivable sur $[1; +\infty[$ et calculer $F'(x)$. [0,5pt]
   (b) En déduire le sens de variation de F. [0,5pt]
2. (a) Démontrer que, pour tout t de I à déterminer $t + 2 \geq 2\sqrt{2}\sqrt{t}$. [0,5pt]
   (b) En déduire que, pour tout x de $[1; +\infty[$; on a $F(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \int_1^x (t+2)e^{1-t}dt$. [0,5pt]
   (c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout x de $[1; +\infty[$; $\int_1^x (t+2)e^{1-t}dt = 4 - (x+3)e^{1-x}$. [1pt]
   (d) En déduire que, pour tout x de $[1; +\infty[$, $0 \leq F(x) \leq \sqrt{2}$. [0,5pt]

!!!!!!!! BONUS !!!!!!!!

On note, pour tout entier n non nul, S_n la somme des $n-1$ premiers termes de la suite (u_n). Exprimer S_n à l'aide d'une intégrale. Montrer que la suite (S_n) converge et donner un encadrement de la limite. [1pt]