SÉQUENCE N°1 / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / OCTOBRE 2009

L'épreuve comporte 2 exercices et un problème. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 [4pts]

Démontrer par récurrence sur l'entier n que :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 4 : 2^n \geqslant n^2$. 1pt
2. $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ 1pt
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R},\ x > -1 : (1+x)^n \geqslant 1 + nx$ 1pt
4. $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum\limits_{i=1}^{n} i(n-i) = \frac{n(n-1)(n+1)}{6}$ 1pt

Exercice 2 [5pts]

1. Soit n un entier naturel.
   a. Déterminer suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne par 7 du nombre $A = n^2 - n + 1$ 1pt
   b. En déduire les entiers n tel que le nombre A soit divisible par 7. 1pt
   c. Déterminer le reste de la division euclidienne par 7 du nombre $B = (862)^2 - 862 + 2$ 0.5pt
2. On pose : $P(x) = x^2 + x - 6$
   a. Calculer $P(2)$ 0.5pt
   b. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 + x + 40 \equiv 0[23]$ 1pt
3. Déterminer les entiers naturels n tels que la fraction $\frac{n+17}{n-1}$ soit un entier relatif. 1pt

Problème [11points]

Rappel :

– *Pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru à b modulo n, et on écrit " $a \equiv b \ (mod.\ n)$ "ou bien "$a \equiv b[n]$" lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b + nk$.*
– *Si r désigne le reste de la division euclidienne de a par n, alors $a \equiv r[n]$.*

Partie A :

1. Vérifier que les entiers $2^6 - 1$; $3^6 - 1$; $4^6 - 1$ et $5^6 - 1$ sont divisibles par 7 4×0.25pt
2. On pose $B_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$. Montrer que $B_{n+6} - B_n$ est divisible par 7. 1pt
3. n étant un entier naturel, q et r sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 6. Montrer que B_n et B_r ont le même reste dans la division euclidienne par 7 1pt
4. Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles B_n est divisible par 7 1pt

Partie B :

1. *Cette question constitue une restitution organisée de connaissances*
   - a. Soient a, b, c et d des entiers relatifs.
     Démontrer que : si $a \equiv b\ (mod.\ 7)$ et $c \equiv d\ (mod.\ 7)$ alors $ac \equiv bd\ (mod.\ 7)$. 1pt
   - b. En déduire que : pour a et b entiers relatifs non nuls
     si $a \equiv b\ (mod.\ 7)$ alors pour tout entier naturel n, $a^n \equiv b^n\ (mod.\ 7)$. 0.5pt
2. Pour $a = 2$ puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que
   $a^n \equiv 1\ (mod.\ 7)$. 0.5pt×2
3. Soit a un entier naturel non divisible par 7.
   - a. Montrer que : $a^6 \equiv 1\ (mod.\ 7)$. 1pt
   - b. On appelle *ordre* de a $(mod.\ 7)$, et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1\ (mod.\ 7)$.
     - i. Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie
       $a^r \equiv 1\ (mod.\ 7)$. 0.5pt
     - ii. En déduire que k divise 6. 0.5pt
     - iii. Quelles sont les valeurs possibles de k ? 0.5pt
   - c. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a tels que $2 \leqslant a \leqslant 6$. 1pt
4. À tout entier naturel n, on associe le nombre $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$.
   Montrer que $A_{2009} \equiv 6\ (mod.\ 7)$. 1pt