Ministère des Enseignements Secondaires
LYCÉE DE MAROUA KONGOLA
B.P. 329 MAROUA
Département de **Mathématiques**

ANNÉE SCOLAIRE 2009/2010
Classe : T$^{\text{le}}$C
Coef : 5 ; Durée : 4 h
Prof : M. Loumsia A.

SÉQUENCE N°2 / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / NOVEMBRE 2009

L'épreuve comporte 2 exercices et un problème. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 [4points]

Rappel : Soit p un entier naturel, p est dit premier si et seulement si les seuls diviseurs positifs de p sont 1 et p.

L'entier naturel S désigne la somme des diviseurs positifs de p^4 où p est un nombre premier plus grand que 2.

1. Exprimer S en fonction de p. 0.5pt
2. Démontrer que $(2p^2+p)^2 < 4S < (2p^2+p+2)^2$. 0.5pt
3. On suppose que S est un carré parfait et on pose $S = n^2$ où n est un entier naturel.
   a. Sachant que l'intervalle $]m, m+2[$, $\forall m \in \mathbb{N}$ contient un et un seul entier, l'entier $m+1$; établir l'existence et l'unicité de n lorsque p est fixé. (On pourra utiliser la question 2.) 1pt
   b. Exprimer n en fonction de p. 0.5pt
   c. Établir que p vérifie la relation : $3+2p-p^2=0$ (On utilisera le fait que $4S=4n^2$) 1pt
   d. Déduire de c. p et puis n. 0.5pt

(*Extrait du Bac C 2009 Cameroun*)

Exercice 2 [5points]

1. **Rappel** : On pose $j = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$. Les nombres complexes 1, j et j^2 sont les racines cubiques de 1.
   a. Calculer $(2+\mathrm{i})^3$. 0.5pt
   b. En déduire les racines cubiques de $2+11\mathrm{i}$. 1pt
2. Soit a un nombre complexe différent de 1. Démontrer par récurrence sur l'entier n que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : 1pt

$$\frac{1-a^n}{1-a} = 1 + a + \cdots + a^{n-2} + a^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k$$

3. Soit n un entier naturel. On pose $A = \sum_{k=0}^{n-1} \cos kx$ et $B = \sum_{k=0}^{n-1} \sin kx$
   a. Montrer que $A + \mathrm{i}B = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$. 0.5pt
   b. Mettre $A+\mathrm{i}B$ sous forme exponentielle, puis sous forme trigonométrique. 0.5pt×2
   c. En déduire des expressions plus simple de A et de B. 0.5pt×2

Problème [**11points**]

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O};\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$

Partie A :

On prend pour unité graphique : 4 cm.

Soit Ω le point d'affixe 2. On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On pose $\sigma = h \circ r$.
   a. Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques. 1pt
   b. Montrer que l'écriture complexe de σ est : $z \longmapsto \frac{1+\mathrm{i}}{2}z + 1 - \mathrm{i}$. 1pt
   c. Soit M un point quelconque du plan d'affixe z. On désigne par M' son image par σ et on note z' l'affixe de M'. Montrer que $z - z' = \mathrm{i}\,(2 - z')$. 1pt
2. a. Démontrer que : si A est un point donné d'affixe a, alors l'image du point P d'affixe p par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est le point Q d'affixe q telle que $q - a = \mathrm{i}(p - a)$.1pt
   b. En déduire la nature du triangle $\Omega MM'$, pour M distinct de Ω. 0.5pt
3. Soit A_0 le point d'affixe $2 + \mathrm{i}$. On considère la suite (A_n) de points du plan définis par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} = \sigma\,(A_n)\,.$$

   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'affixe a_n de A_n est donnée par : 1pt

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2.$$

   b. Déterminer l'affixe de A_5. 0.5pt

Partie B :

On note les points A et B les points d'affixes respectives $4+2\mathrm{i}$ et $-2-\mathrm{i}$. On considère l'application f qui, à tout point M différent de B et ayant pour affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{z - 4 - 2\mathrm{i}}{z + 2 + \mathrm{i}}$$

Déterminer puis construire dans le repère les ensembles suivants :

1. E_1 : ensembles des points M tels que $|z'| = 1$; 1.25pt
2. E_2 : ensembles des points M tels que $|z'| = 2$; 1.25pt
3. E_3 : ensembles des points M tels que z' soit réel ; 1.25pt
4. E_4 : ensembles des points M tels que z' soit imaginaire pur. 1.25pt

« *Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.* »
EUCLIDE D'ALEXANDRIE