Ministère des Enseignements Secondaires
Lycée de Maroua Kongola
B.P. 329 Maroua
Département de **Mathématiques**

Année Scolaire 2009/2010
Classe : $T^{le}C$
Coef : 5 ; Durée : 4 h
Prof : M. Loumsia A.

SÉQUENCE N°4 / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / MARS 2010

L'épreuve comporte 2 exercices et un problème. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 [4.5 pts]

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{3+4i}{5}z + \frac{1-2i}{5}$$

1. On note x et x', y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z'.
   Démontrer que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(3x - 4y + 1) \\ y' = \frac{1}{5}(4x + 3y - 2) \end{cases}$ 1pt
2. a. Déterminer l'ensemble des points invariants par f. 0.5pt
   b. Quelle est la nature de l'application f. 0.5pt
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M d'affixe z tels que z' soit réel. 0.5pt
4. On cherche à déterminer les points de $\mathcal{D}$ dont les coordonnées sont entières.
   a. Donner une solution particulière $(x_0; y_0)$ appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x + 3y = 2$. 0.5pt
   b. Déterminer l'ensemble de solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x + 3y = 2$. 0.5pt
5. On considère les points M d'affixe $z = x + iy$ tels que $x = 1$ et $y \in \mathbb{Z}$. Le point $M' = f(M)$ a pour affixe z'. Déterminer les entiers y tels que $Re(z')$ et $Im(z')$ soient entiers. (*On pourra utiliser les congruences modulo 5*) 1pt

Exercice 2 [4.5pts]

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$. On considère les points $A(-2; 1; 3)$, $B(0; 2; -2)$, $C(2; 1; 1)$, $D(1; 0; 2)$ et le plan (P) d'équation $2x - y + 2z + 1 = 0$.

1. a. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés, puis en déduire une équation cartésienne du plan (ABC). 0.75pt
   b. Démontrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires. 0.5pt
   c. Calculer l'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre $ABCD$. 0.5pt
2. Déterminer l'expression analytique de la réflexion de plan (P). 0.75pt
3. a. Déterminer les coordonnées du point G tel que $G = bar\{(A,1); (B,-2); (C,3)\}$. 0.5pt
   b. Déterminer l'ensemble $(\mathscr{S})$ des points M de l'espace tels que : 0.75pt

$$\left(\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{BM} + 3\overrightarrow{CM}\right).\overrightarrow{BM} = 0.$$

   c. Déterminer l'intersection du plan (P) et de l'ensemble $(\mathscr{S})$. 0.75pt

Problème [**11points**]

Partie A :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) :$y' + m^2y = 0$ $(m \in \mathbb{R}^*)$, $y(0) = 40$. 0.5pt

2. **Applications**

   Soit θ la température d'un corps à l'instant t. La température ambiante est $30^{\circ}C$. A chaque instant t, on pose : $x(t) = \theta(t) - 30$.

   On suppose que la fonction x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie : $x' = -m^2x$ $(m \in \mathbb{R}^*)$.

   A l'instant 0 la température du corps est $70^{\circ}C$ et au bout de 5 minutes elle n'est plus que $60^{\circ}C$.

   a. Déterminer $\theta(t)$, où t est mesuré en minutes. 1.5pt

   b. A quelle température sera le corps au bout de 20 minutes ? 0.5pt

Partie B :

ABC est un triangle et f une application affine du plan telle que $f(A) = C$, $f(B) = B$ et $f(C) = A$.

1. Montrer que $f \circ f = Id$. 0.5pt
2. Montrer que le milieu I de $[AC]$ est invariant par f. 0.5pt
3. Montrer que la droite (BI) est invariante point par point par f. 0.5pt
4. Montrer que la droite (AC) est globalement invariante par f. 0.5pt
5. Soit M un point quelconque du plan et M' son image par f.

   a. Montrer que $(AC) /\!/ (MM')$. 0.5pt

   b. Montrer que le milieu H de $[MM']$appartient à (IB). 0.5pt

   c. En déduire que f est une affinité dont on déterminera les éléments caractéristiques. 0.5pt

Partie C :

On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+x)^2}$. On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Calculer la limite de cette fonction lorsque x tend vers $+\infty$. 0.5pt

   b. Calculer la limite de cette fonction lorsque x tend vers -1. 0.5pt

   c. Que représente la droite d'équation $x = -1$ pour la courbe $(\mathcal{C})$? 0.25pt

2. Calculer $f'(x)$ et montrer que son signe est celui de $\dfrac{x-1}{x+1}$. 0.5pt
3. Dresser le tableau de variation de f. 0.5pt
4. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$, les droites d'équations $x = -1$ et $y = 1$, ainsi que la tangente à cette courbe en son point d'abscisse 0. (Unité graphique : 4 cm). 1.25pt
5. a. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution, notée α dans l'intervalle [1 ;10]. 0.5pt

   b. Utiliser le graphique précédent pour donner deux nombres entiers consécutifs a et b tels que $\alpha \in [a,b]$. 1pt

« Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve. »
EUCLIDE D'ALEXANDRIE