

SÉQUENCE N°1 / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / OCTOBRE 2010

L'épreuve comporte 2 exercices et un problème. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (25 min) [4pts]

1. Pour tout entier naturel n , démontrer que l'on a: $10^n \equiv 1[9]$ et $10^n \equiv 1[3]$ 0.5pt×2
2. a. Donner le développement suivant les puissances de 10 de 5 428. 0.25 pt
b. Démontrer que $5\,428 \equiv 5 + 4 + 2 + 8[9]$ et que $5\,428 \equiv 5 + 4 + 2 + 8[3]$ 0.5pt× 2
3. Démontrer que tout entier est congru modulo 3 et modulo 9 à la somme des chiffres de son écriture décimale. 1pt
4. En déduire des critères de divisibilité d'un entier par 3 ou par 9. 0.75pt

Exercice 2 (30 min) [5pts]

On considère le nombre complexe: $z = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)$.

1. Écrire z^2 sous forme algébrique. 1pt
2. a. Déterminer le module et un argument de z^2 . 0.5pt ×2
b. En déduire le module et un argument de z . 0.5pt ×2
3. Donner la forme trigonométrique de z 1 pt
4. Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et de $\sin \frac{\pi}{12}$ 1 pt

Problème (60 min) [11points]

Partie A :

1. Vérifier que les entiers $2^6 - 1$; $3^6 - 1$; $4^6 - 1$ et $5^6 - 1$ sont divisibles par 7 4×0.25pt
2. On pose $B_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$. Montrer que $B_{n+6} - B_n$ est divisible par 7. 1pt
3. n étant un entier naturel, q et r sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 6. Montrer que B_n et B_r ont le même reste dans la division euclidienne par 7 1pt
4. Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles B_n est divisible par 7 1pt

Partie B :

1. On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = 0$
a. Déterminer le réel y tel que iy soit solution de (E). 1pt
b. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z : 1pt

$$z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = (z - i)(z^2 + az + b)$$

c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E'): $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$. 1pt

d. En déduire les solutions de (E) 0.5pt

2. On considère le point A d'affixe $z_A = i$, le point B d'affixe $z_B = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ et le point C symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.

a. Placer ces points sur un graphique. 1pt

b. Déterminer le module et un argument du quotient: $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$. 0.75pt×2

c. En déduire une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ et la nature du triangle ABC . 0.5pt × 2