SÉQUENCE N°3 / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / JANVIER 2011

L'épreuve comporte 2 exercices et un problème. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 [5,5 pts]

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(\text{O}; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ l'unité graphique est 2 cm.

On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives:

$$a = 2, \quad b = 2 + 3\text{i}, \quad c = 3i, \quad d = -\frac{5}{2} + 3\text{i} \quad \text{et} \quad e = -\frac{5}{2}.$$

1. Placer ces cinq points sur un graphique qui sera complété au fil de l'exercice. 0,5pt

2. On admet que deux rectangles sont semblables si et seulement si le rapport de la longueur sur la largeur est le même pour les deux rectangles.
Démontrer que OABC et ABDE sont deux rectangles et qu'ils sont semblables. 1,25pt

3. **Étude d'une similitude directe transformant OABC en ABDE**

a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s qui transforme O en A et A en B. 1pt

b. Démontrer que la similitude s transforme OABC en ABDE. 1 pt

c. Quel est l'angle de la similitude s ? 0,5pt

d. Soit Ω le centre de cette similitude. En utilisant la composée $s \circ s$, démontrer que le point Ω appartient aux droites (OB) et (AD). En déduire la position du point Ω. 1,25pt

Exercice 2 [3,5pts]

ABC est un triangle et f une application affine du plan telle que $f(A) = C$, $f(B) = B$ et $f(C) = A$.

1. Montrer que $f \circ f = Id$. 0,5pt

2. Montrer que le milieu I de $[AC]$ est invariant par f. 0,5pt

3. Montrer que la droite (BI) est invariante point par point par f. 0,5pt

4. Montrer que la droite (AC) est globalement invariante par f. 0,5pt

5. Soit M un point quelconque du plan et M' son image par f.

a. Montrer que $(AC) \mathbin{/\!/} (MM')$. 0,5pt

b. Montrer que le milieu H de $[MM']$appartient à (IB). 0,5pt

c. En déduire que f est une affinité dont on déterminera les éléments caractéristiques. 0,5pt

Problème [11points]

Partie A :

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples (n, m) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation : $7^n - 3 \times 2^m = 1$ (F).

1. On suppose $m \leqslant 4$.
Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions. 1 pt

2. On suppose maintenant que $m \geqslant 5$.

a. Montrer que si le couple $(n,\, m)$ vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 \pmod{32}$. 1 pt

b. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple $(n,\, m)$ vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4. 1 pt

c. En déduire que si le couple $(n,\, m)$ vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 \pmod{5}$. 0,5 pt

d. Pour $m \geqslant 5$, existe-t-il des couples $(n,\, m)$ d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ? 0,5pt

3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F). 1 pt

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^{-x}-1}{\sqrt{x}}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$.

1. Prouver que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-t}-1}{t} = 1$. 0,5pt

2. En déduire la continuité de f en 0. 0,5pt

3. Étudier le signe de $f(x)$. 0,5pt

4. Étudier la limite de f en $+\infty$. 0,5pt

5. Montrer que l'on a pour tout $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{1 - e^{-x} - 2xe^{-x}}{2x\sqrt{x}}$. 0,5pt

6. On pose $g(x) = 1 - e^{-x} - 2xe^{-x}$.

a. Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation. 1pt

b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans $[\frac{1}{2}\ ;\ +\infty[$ que l'on notera α. 0,5pt

c. Donner le signe de g sur $[0\ ;\ +\infty[$. 0,5pt

7. En déduire les variations de f. 0,5pt

8. Étudier la dérivabilité de f en 0. 0,5pt

9. Construire la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f tout en mettant en évidence la tangente au point d'abscisse 0. 0,5pt