Lycée Bilingue de Mbanga
Département de Mathématiques Année Scolaire 2009/2010

Epreuve de la quatrième séquence
Classe : $T^{le}C$ Durée : 4h Coef : 5
Examinateur : M. KENMOGNE N. M

NB : L'épreuve comporte trois éxercices et un problème sur deux pages numérotées de 1 à 2. L'élève traitera les trois éxercices et le problème. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte lors de l'évaluation de la copie de l'élève.

Exercice 1 (4.25pts)

1. On cherche deux entiers relatifs x et y solutions de l'équation (1) : $ax + by = 60$; $a, b \in \mathbb{N}^*$. On note $d = PGCD(a, b)$.
   a) On suppose que (1) a au moins une solution (x_0, y_0) : Montrer d divise 60. 0.25pt
   b) On suppose que d divise 60 : Montrer qu'il existe au moins une solution (x_0, y_0) de (1). 0.75pt
2. On considère l'équation (2) : $24x + 36y = 60$, $x, y \in \mathbb{Z}$.
   a) Déterminer le PGCD de 24 et 36 et simplifier (2). 0.25pt
   b) Trouver une solution particulière de (2), puis résoudre (2) dans $\mathbb{Z}^2$. 1pt
   On appelle S l'ensemble des couples (x, y) solution de (2).
   c) Donner tous les couples (x, y) de S tels que $|x| \leq 10$. Donner parmi eux, ceux pour lesquels x et y sont multiples de 5. 0.75pt
   d) Représenter graphiquement l'ensemble (E) des points $M(x, y)$ tels que :
   $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. 0.5pt
   (a) Montrer que les points ayant pour coordonnées (x, y) élément de (S), appartiennent à (E). En déduire une caractérisation de S. 0.75pt

Exercice 2 (3.5pts)

Soit $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On considère l'équation d'inconnue z
(E) : $(1 + iz)^3(1 - i\tan\alpha) = (1 - iz)^3(1 + i\tan\alpha)$.

1. Soit z_0 une solution de (E). Montrer que $|1 + iz_0| = |1 - iz_0|$ et en déduire que z_0 est réel. 1pt
2. a) Exprimer $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$. 0.5pt
   b) Soit $z \in \mathbb{R}$, on pose $z = \tan\varphi$ avec $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
   Montrer que (E) est équivalente à une équation (E') en φ que l'on déterminera. 0.75pt
   c) Résoudre l'équation (E') en φ. 0.5pt
   d) En déduire les solutions de (E). 0.75pt

Exercice 3 (3.25pts)

ABC est un triangle rectangle en A, non isocèle et de sens indirect. A l'extérieur de ce triangle, on construit les carrés $ABDE$ et $AGFC$. On désigne par I le point d'intersection des droites (ED) et (GF), r le quart de tour indirect de centre A, r' le quart de tour direct de centre F, r" le quart de tour direct de centre O, t et t' les translations de vecteurs respectifs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$. O étant le centre du carré $AGFC$.

1. Réaliser une figure. 0.5pt
2. En utilisant l'application $f = r \circ t$, démontrer que les droites (AI) et (BC) sont perpendiculaires. 0.75pt
3. En utilisant l'application $g = t' \circ r'$, démontrer que les droites (BI) et (CD) sont perpendiculaires. 0.75pt
4. En utilisant r", montrer que les droites (IC) et (BF) sont perpendiculaires. 0.75pt
5. En déduire que les droites (AI), (BF) et (CD) sont concourantes. 0.5pt

Problème (9pts)

Les buts du problème sont l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$, puis la recherche de primitives de cette fonction.

Partie A : Etude de fonctions auxilliaires (4.25pts)

I. On définit la fonction g sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par : $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$.
   1. Etudier les variations de g. 1pt
   2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique, notée α, tel que $e + 1 < \alpha < e^3 + 1$. 0.5pt
   3. En déduire suivant les valeurs de x le signe de $g(x)$. 0.25pt

II. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par : $\varphi(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x}$.
   1. Calculer les limites de φ aux bornes de son domaine de définition. 0.75pt
   2. Calculer $\varphi'(x)$ et montrer que $\varphi'(x) = \frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$. 0.5pt
   3. En déduire les signes de $\varphi'(x)$ et de $\varphi'(e^x)$ suivant les valeurs de x. 0.75pt

Partie B : Etude de la fonction f. (3.25pts)

1. Vérifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) = \varphi(e^x)$ et montrer que $f'(x) = e^x\varphi'(e^x)$. 0.5pt
2. En déduire :
   a) La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0. 0.25pt
   b) La limite de f lorsque x tend vers $+\infty$. 0.25pt
   c) Le sens de variation de f sur $]0, +\infty[$ et que f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$. 0.75pt
3. Montrer que $\varphi(\sqrt{\alpha}) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$ et déduire de ce qui précède que $\forall x > 0$, on a : $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$. 0.75pt
4. Soit h la restriction de f sur $[\ln\sqrt{\alpha}, +\infty[$. Montrer que h admet une réciproque h^{-1} dont on donnera le domaine de définition et le domaine de dérivabilité. 0.75pt
5. Représenter graphiquement f et h^{-1} dans repère un repère orthogonal d'unités 5cm en abscisse et 10cm en ordonnée. On prendra $\alpha = 10$ 1pt

Partie C : Recherche de primitives de f. (1.5pts)

1. Vérifier que pour tout réel $x > 0$, on a $f'(x) + f(x) = \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1}$. 0.5pt
2. On pose $u(x) = \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1}$.
   a) Trouver une primitive U de u sur l'intervalle $]0, +\infty[$. 0.5pt
   b) En déduire les primitives F de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$. 0.5pt

" Le maître force l'esclave à travailler et en travaillant, l'esclave devient le maître de la nature. "

Travaillez, travaillez pour vous-même, c'est là la clé du succcès.