Republique du Cameroun
. Paix-Travail-Patrie
Ministère de l'Enseignement Supérieur
. **Université de Douala**
Faculté de Génie Industriel

Republic of Cameroon
Peace-Work-fatherland
Ministry Of Higher Education
University Of Douala
Faculty Of Industrial Engineering

Année Académique 2007-2008
Academic Year 2007-2008

CONCOURS D'ENTREE EN 1$^{\text{ERE}}$ ANNEE, SESSION DE SEPTEMPBRE 2007
FIRST YEAR ENTRANCE EXAMINATION, SEPTEMBER SESSION 2007

EPREUVE DE (PAPER OF) : MATHEMATIQUES (METHEMATICS) BAC : C,D,E et GCE A-Level
Durée (Time) : 3 heures (hours)

Exercice 1 [5points]

1. Soit $g_\alpha(x) = \ln(x-\alpha) + \frac{x}{x-\alpha}$, $\alpha \in]0;+\infty[$, une fonction réelle d'une variable réelle.
   (a) Déterminer le domaine de définition de g_α et calculer les limites.
   (b) Calculer la dérivée de g_α et dresser son tableau de variations.
   (c) En déduire le nombre de racines de l'équation $g_\alpha(x) = 0$ en précisant les intervalles auquels elles appartiennent pour $\alpha = e^{-2}$, $\alpha > e^{-2}$ et $\alpha < e^{-2}$.
2. Soit $f_\alpha(x) = e^{\alpha x \ln(x-\alpha)}$ une fonction réelle définie pour $x \in]\alpha;+\infty[$, $\alpha = e^{-2}$.
   (a) Calculer les limites de f_α.
   (b) Calculer la dérivée et dresser le tableau de variations de f_α.
   (c) Que représente le point $x = 2\alpha$ pour la courbe f_α ?

Exercice 2 [5points]

On désigne par (E) l'équation $4z^4 + 4\cos\theta(1+\cos\theta)z^2 + (1+\cos\theta)^2 = 0$ où z est un nombre complexe inconnu et $\theta \in [0;\pi[$.

1. On pose $z^2 = \frac{1}{2}(1+\cos\theta)x$.
   (a) Exprimer l'équation d'inconnue x obtenue à partir de l'équation (E).
   (b) Déterminer le module et l'argument de chacune des racines de cette équation.
2. En déduire le module et l'argument de chacune des racines de l'équation (E).
3. En déduire que lorsqu'un nombre complexe z est racine de l'équation (E), $\bar{z}$ et $-z$ sont aussi racine de cette équation.
4. Calculer la somme des racines de l'équation (E).

Exercice 3 [6points]

Soit $\alpha < \lambda < \theta < \beta$ et $a_0 < b_0$ six nombres réels donnés. On construit la suite croissante des points $A_n(\alpha, a_n)$ et la suite des points $B_n(\beta, b_n)$ du plan (n étant un entier naturel) comme représenté sur la figure ci-dessous.

(figure)

1. Montrer que $a_{n+1} = (1-k)a_n + kb_n$ et $b_{n+1} = ha_n + (1-h)b_n$ où h et k sont deux réels à déterminer en fonction de α, β, λ et θ.

2. On pose $d_n = b_n + a_n$ et $c_n = b_n - a_n$. Montrer que $d_{n+1} = d_n + \mu c_n$ et $c_{n+1} = \lambda c_n$ où λ et μ sont deux réels à déterminer en fonction de h et k.
3. Exprimer c_n et d_n en fonction de λ, μ, c_0 et d_0.
4. Montrer que les suites (c_n) et (d_n) sont convergentes.
5. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite que l'on déterminera en fonction de k, h, a_0 et b_0.

Exercice 4 **[4points]**

1. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x dx$ où n est un entier naturel non nul.
   (a) Calculer I_1.
   (b) Trouver une relation entre I_{n+1} et I_n.
   (c) En déduire I_5.
2. Soient $I = \displaystyle\int_0^a \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$ et $J = \displaystyle\int_0^a \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$, $a = \frac{\pi}{3}$.
   (a) Calculer $I + J$ et $I - J$.
   (b) En déduire les valeurs respectives de I et J.