UNIVERSITE DE YAOUNDE I

ECOLE NORMALE SUPERIEURE SUPERIEURE DE YAOUNDE

Concours d'entrée en première année du second cycle : Session de 2005

Filière : Mathématiques

Epreuves d'Algèbre et Analyse Durée : 3heures.

EXERCICE 1 :

Soit (E,d) un espace métrique et soit θ une fonction numérique croissante sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant

(1) $$\theta(0)=0 \text{ et } \theta(u+v)\leq\theta(u)+\theta(v),\ \ \forall u,v\in\mathbb{R}_+.$$

1. Montrer que $\delta=\theta\circ d$ est une distance sur E.
2. On suppose que θ est continue à l'origine.
   (a) Montrer qu'alors toute partie E ouverte dans (E,δ) est ouverte dans (E,d).
   (b) Montrer que toute fonction continue sur (E,δ) est continue sur (E,d).
   (c) Montrer que toute suite de points de E qui est de Cauchy dans (E,d) est de Cauchy dans (E,δ).
3. Montrer que si θ est strictement croissante, les distances d et δ définissent la même topologie et les mêmes suites de Cauchy sur E.
4. Application : on pose $\theta(u)=\inf(1,u)$.
   (a) Montrer que θ vérifie l'hypothèse (1).
   (b) Les distances d et δ sont-elles toujours équivalentes ?

EXERCICE 2 :

Soit (E,d) un espace métrique.

1. Montrer que toute suite $(x_n)_n$ de points de E vérifiant la condition

   (2) $$\forall n\in\mathbb{N},\ \ d(x_n,x_{n+1})<\frac{1}{2^n}$$

   est une suite de Cauchy.
2. Montrer que de toute suite de Cauchy, on peut extraire une suite vérifiant (2).
3. Montrer que (E,d) est un espace métrique complet si et seulement si toute suite vérifiant (2) est convergente.
4. En déduire qu'un espace vectoriel normé E est complet si et seulement si toute série normalement convergente est convergente.

EXERCICE 3 :

Un objet (S) a la forme d'un cône (C), (Voir dessin ci-contre) de hauteur H, de rayon de base R et de densité $d(x,y,z)=xy+z$ en chaque point $M(x,y,z)\in(S)$.

1. Donner une équation cartésienne de (C) (On expliquera la méthode utilisée).
2. Déterminer la masse de l'objet (S).
3. Déterminer le volume qu'occupe (S).

EXERCICE 4 :

Soit $M(2,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre 2. On définit la forme bilinéaire f

$$f(A,B) = trace(AB).$$

1. Montrer que f est symétrique et donner l'expression de f en fonction des coefficients de A et B.
2. On pose $g(A,B) = \frac{1}{2}[trace(A)trace(B) - trace(AB)]$.
   (a) Montrer que g est bilinéaire symétrique.
   (b) Ecrire la matrice de g dans la base $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$
   (c) Démontrer que $g(A,A) = det(A)$.
   (d) Déduire la relation

$$[trace(A)trace(B) - trace(AB)] = det(A+B) - det(A) - det(B).$$

EXERCICE 5 :

On considère H un endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ -i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser H dans une base orthonormée de $\mathbb{C}^4$.