Lycée de Japoma
Département de Mathématiques Année scolaire : 2009/2010

Classe : $\mathbf{T^{le}C}$ Durée : 4h ; coef : 5

Janvier 2010

Epreuve de Mathématiques. 3^{eme} séquence

Examinateur : **NJIONOU S. P**

L'épreuve comporte trois exercices et un problème, tous obligatoires. La qualité de la rédaction et la cohérence dans le raisonnement seront prises en compte lors de l'évaluation de la copie.

Exercice 1 (2pts).

1. Vérifier que 19 et 23 sont premier entre eux, puis déterminer deux entiers x_0 et y_0 tels que $19x_0 - 23y_0 = 1$.
2. Déduire de ce qui précède une solution particulière de l'équation $19x - 23y = 36$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $323x - 391y = 612$.

Exercice 2 (3pts).

(C) est un cercle de centre O et A un point de (C). Soit M un point de (C) et P le point tel que $[MP]$ est un diamètre de (C). La droite (AP) et la parallèle à (OA) passant par M se coupent en un point N.

1. Faire une figure.
2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaire.
3. Montrer qu'il existe une translation dont on déterminera le vecteur qui transforme M en N.
4. En déduire le lieu géométrique des points N lorsque M parcourt (C).

Exercice 3 (4pts).

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

Dans le plan orienté, ABCD est un carré direct $\left(\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) = \frac{\pi}{2}\right)$. On note I son centre et J le milieu de [AI].

1. C est le barycentre des points pondérés (A, m), (B, 1) et (D, 1) lorsque :
   a. $m = -2$ **b.** $m = 2$ **c.** $m = -1$ **d.** $m = 3$
2. (a) B est l'image de C par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   (b) Le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme I en J est $\frac{2}{3}$.
   (c) Le triangle DAB est invariant par la symétrie de centre I.
   (d) J est l'image de I par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{DB}}$.
3. L'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}}\| = \mathrm{AB}$ est :
   (a) la médiatrice de [AC].
   (b) le cercle circonscrit au carré ABCD.
   (c) la médiatrice de [AI].

(d) le cercle inscrit dans le carré ABCD.

4. L'ensemble des points M du plan tels que : $\left(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right) = 0$ est :
   (a) la médiatrice de [AC].
   (b) le cercle circonscrit au carré ABCD.
   (c) la médiatrice de [AI].
   (d) le cercle inscrit dans le carré ABCD.

Problème (11pts).Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 2 - \frac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 3}.$$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repére orthonormal $(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

1. (a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   (b) Démontrer que la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
   (c) Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}_1$.
2. (a) On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x, on a :
   $$f'(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^x - 3}{\mathrm{e}^x + 3}\right)^2$$
   (b) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. (a) Que peut-on dire de la tangente $\mathcal{D}_2$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point I d'abscisse $\ln 3$?
   (b) En utilisant les variations de la fonction f, étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}_2$.
4. (a) Montrer que la tangente $\mathcal{D}_3$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = \frac{1}{4}x + 1$.
   (b) Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la tangente $\mathcal{D}_3$ sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ \ln 3]$. On pourra utiliser la dérivée seconde de f notée f'' définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par :
   $$f\text{''}(x) = \frac{12\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 3\right)}{\left(\mathrm{e}^x + 3\right)^3}.$$
5. On admet que le point I est centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$.
   Tracer la courbe $\mathcal{C}$, les tangentes $\mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_3$ et les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$. On rappelle que l'unité graphique choisie est 2 cm.
6. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α.
   (b) Calculer $f(-2) \times f(-1)$ et en déduire que $\alpha \in]-2; -1[$.
   (c) Déterminer par la méthode par dichotomie une valeur approchée de α à $0,1$ près.
7. On définit la fonction g par $g(x) = \dfrac{4e^x}{e^x + 3} - 2$ et on considère la suite $(u_n)_n$ définie par :
   $$\left\{\begin{array}{l} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = g(u_n) \end{array}\right. .$$
   (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (b) Montrer que $g([-2; -1]) \subset [-2; -1]$.

(c) Montrer que pour tout $x \in [-2;-1]$, $|g'(x)| \leq g'(-1)$.
On pourra utiliser la dérivée seconde de f
Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près par excès (à l'aide de votre calculatrice) de $g(-1)$.

(d) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \in [-2;-1]$

(e) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,4|u_n - \alpha|$.

(f) En déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$ et que la suite (u_n) converge vers α.

(g) Pour quelles valeurs de n, u_n est-elle une valeur approchée de α à 10^{-2} près ?

« Il faut d'abord faire ce qu'on sait faire, ensuite, faire ce qu'on peut faire. »
Travaillez, travaillez par vous même, c'est là la clé du succès.