MINESEC
Lycée de Japoma
Département de Mathématiques
www.easy-maths.org

Année scolaire : 2010-2011
Classe : T^le C **Durée : 4 heures**
Baccalauréat blanc **Mai 2011**
Coef : 05

Épreuve de Mathématiques

Examinateur : **Njionou Patrick, S.**

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE 1 **2 points**

On considère l'équation :

$$8X + 5Y = 100 \quad [E']$$

d'inconnue le couple d'entiers relatifs $(X,\ Y)$.

1. Résoudre $[E']$. [1pt]
2. Au VIII^e siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge (*L'histoire ne révèle pas ce qu'ils faisaient*). Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ? [1pt]

EXERCICE 2 **5 points**

I- Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Unité graphique 2cm. Soit f la transformation du plan qui à tout point $M(x, y)$ associe le point M' tel que : $\begin{cases} 4x' = x - \sqrt{3}y \\ 4y' = \sqrt{3}x + y \end{cases}$.

1. **a.** Déterminer l'écriture complexe de f. [0,5pt]

   b. En déduire que f est une similitude directe plane dont on déterminera le centre, le rapport et l'angle. [0,5pt]

2. Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que : $7x^2 + 13y^2 - 6\sqrt{3}xy = 64$ et (Γ') son image par f.

   a. Déterminer une équation de (Γ'). [0,5pt]

   b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ'). [0,5pt]

   c. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (Γ). [0,5pt]

   d. Construire (Γ) et (Γ') dans le plan. [0,5pt]

II- On considère la parabole $(\mathscr{P})$ d'équation $y^2 = 2px$ $(p > 0)$. On considère trois points A, M et N appartenant à la parabole $(\mathscr{P})$ d'ordonnées respectives a, m et n et tels que $(AM)\perp(AN)$.

1. Déterminer les abscisses des points A, M et N. [0,5pt]
2. Démontrer que les droites (AM) et (AN) sont perpendiculaires si et seulement si [0,5pt]

$$4p^2 + a^2 + a(m+n) + mn = 0.$$

3. Déterminer une équation de la droite (MN) et montrer que ces droites passent par un point fixe I dont on déterminera les coordonnées. [0,5pt]
4. Déterminer le lieu de I lorsque A décrit $(\mathscr{P})$. [0,5pt]

EXERCICE 3 **5 points**

On considère trois urnes U, V et W contenant chacne des boules portant le numéro 1 ou le numéro 2. La probabilité de tirer une boule numérotée 1 de U est $P_1 = 0,4$; celle de tirer 1 de V est $P_2 = 0,5$ et enfin celle de tirer 1 de W est $P_3 = 0,7$.

I- On tire une boule de U, une boule de V et une boule de W. Soient a, b et c les numéros respectifs de ces boules. Soit (E) la conique d'équation $\frac{x^2}{a^2} - (-1)^c \frac{y^2}{b^2} = 1$ et (u_n) la suite définie de façon récurrente par $au_{n+1} = bu_n + c$ et $u_0 \in \mathbb{R}$. Calculer la probabilité pour que :

1. (E) soit un cercle ; [0,5pt]
2. (E) soit une ellipse ; [0,5pt]
3. (E) soit une hyperbole équilatère ; [0,5pt]
4. (u_n) soit une suite arithmétique. [0,5pt]

II- Un jeu consiste à tirer une boule de chaque urne :

- Dans U, une boule n°1 tirée fait gagner 40 F tandis que la n°2 fait perdre 60F ;
- Dans V, une boule n°1 tirée fait gagner 50 F tandis que la n°2 fait perdre 50F ;
- Dans W, une boule n°1 tirée fait gagner 70 F tandis que la n°2 fait perdre 30F ;

1. Quelles sont les sommes possibles qu'un joueur peut avoir à l'issu de ce jeu ? [0,5pt]
2. On appelle X la variable aléatoire réelle donnant la somme algébrique (en franc) obtenue par un joueur à la fin des tirage.
   a. Définir la loi de probabilité de X. [0,5pt]
   b. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$. [0,5pt]
3. Déterminer la probabilité pour qu'à la fin des trois tirages, un joueur ait une somme algébrique strictement positive ($P(X > 0)$). [0,5pt]
   Lorsque $X > 0$, on dit que le joueur a gagné, et dans le cas contraire le joueur a perdu.
4. On réitère le jeu n fois et on appelle Y la variable aléatoire donnant le nombre de fois que le joueur gagne au cours de n tirages.
   a. Déterminer la loi de probabilité de Y. [0,5pt]
   b. Déterminer l'espérance mathématique et l'écart type de Y. [0,5pt]

PROBLEME **8 points**

Partie A[**1,5 point**] *(Valeur approchée d'un zéro)*

On définit la fonction $r(x) = x + e^{3x}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} r(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} r(x)$. [0,5pt]
2. Calculer la dérivée $r'(x)$ de $r(x)$ et en déduire le tableau de variations de r. [0,25pt]
3. Déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $r(\alpha) = 0$. [0,25pt]
4. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près. [0,5pt]

Partie B [**1 point**] *(Etude d'une fonction intermédiaire)*

On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1-3x}{x+e^{3x}}$.

5. Déterminer l'ensemble de définition de g. [0,5pt]
6. Etudier le signe de g sur son ensemble de définition. [0,5pt]

Partie C [**2,5 points**] *(Etude d'une fonction)*

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(x + e^{3x}) - 3x$.

7. Déterminer l'ensemble de définition de f. (On pourra utiliser le réel α de la partie précédente). [0,5pt]
8. Calculer la dérivée de f et en déduire le tableau de variation de f. [1pt]
9. Construire f dans un repère orthogonal. (Unité sur les axes 3cm). [1pt]

Partie D[**3points**] *(Suite définie par une intégrale)*

On considère la suite (I_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)dx$.

10. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$. [0,5pt]
11. Montrer que la suite (I_n) est croissante. [0,5pt]
12. On définit la suite (J_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $J_n = \displaystyle\int_0^n xe^{-3x}dx$.
    - **a.** Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$. [0,5pt]
    - **b.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leq J_n$. [0,5pt]
    - **c.** Montrer que la suite (J_n) est convergente et déterminer sa limite. (*On pourra proceder par une intégration par partie*). [0,5pt]
    - **d.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leq \dfrac{1}{9}$. [0,25pt]
    - **e.** La suite (I_n) est-elle convergente ? [0,25pt]

Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.
Euclide d'Alexandrie