UNIVERSITE DE YAOUNDE I

Ecole Normale Supérieure de Yaoundé

Concours d'entrée en première année du premier cycle

Série : Mathématiques **Epreuve** : Géométrie **Durée** : 3h **Session :** 2011

Exercice 1/ 4points

Soient ABC un triangle, G le barycentre de ABC et J le barycentre de $(B,1)$, $(C,4)$. La droite (GJ) coupe la droite (AB) au point K.

1. Faire une figure et placer les points G et J. [1pt]
2. On souhaite déterminer le réel x tel que $\overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{AB}$.
   (a) Justifier sans calculs l'existence d'un réel y tel que $\overrightarrow{JK} = y\overrightarrow{JG}$. [0,5pt]
   (b) Exprimer $\overrightarrow{JG}$, puis $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. [1pt]
   (c) En déduire la valeur de x et exprimer G comme barycentre de J et K. [1,5pt]

Exercice 2/ 4points

Soit $ABCD$ un tétraèdre de sens direct tel que ABC est isocèle rectangle en A, la droite (CD) est orthogonale au plan (ABC), $AB = 1$ et $CD = \sqrt{2}$.

1. Déterminer le périmètre et le volume de $ABCD$. [1pt+1pt]
2. Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$ et le produit vectoriel $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$. [1pt+1pt]

Exercice 3/ 7points

Soit $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct du plan complece P. Soient f et g deux applications de P dans P telles que pour tout point M de P, $g(M)$ est le milieu de $[M, f(M)]$.

1. On suppose que f est une symétrie centrale de centre I.
   (a) Déterminer $g(M)$ pour tout $M \in P$. [0,5pt]
   (b) Peut-on dire que : si f est une similitude alors g est aussi une similitude. Justifier. [1pt]
2. On suppose que f est une isométrie de forme complexe $z' = az + b$, $(a, b) \in \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}$.
   (a) Déterminer la forme complexe de g. [0,5pt]
   (b) En déduire que g est aussi une isométrie si et seulement si f est une translation. [1pt]
3. On suppose que f est une application affine. Montrer que g est aussi une application affine. [1pt]
4. On suppose que f a pour forme complexe $z' = iz - 4$. Déterminer la nature exacte et les éléments caractéristiques de f et g. [0,5pt+1pt]
5. On suppose que f est la projection orthogonale d'axe l'axe des abscisses.
   (a) Exprimer $\overrightarrow{f(M)g(M)}$ en fonction de $\overrightarrow{f(M)M}$. [0,5pt]
   (b) En déduire la nature exacte et les éléments caractéristiques de g. [1pt]

Exercice 4/ 5points

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace $(\mathcal{E})$. On considère le point $A(3, 1, -2)$, le plan $(P) : x - 2y - 2z = 1$ et l'ensemble (Γ) des points $M(x, y, z)$ tels que $-9x^2 + 16y^2 + 25z^2 = 0$.

1. Etant donné le plan $(P_1) : x = 1$, montrer que $(P_1) \cap (\Gamma)$ est une conique dont on donnera la nature, l'excentricité et l'axe focal. [1pt]
2. Etant donné le plan $(P_2) : y = 1$, montrer que $(P_2) \cap (\Gamma)$ est une conique dont on donnera la nature, l'excentricité et l'axe focal. [1pt]
3. Soit (d) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(1, 2, 2)$.
   (a) Donner une représentation paramétrique de (d). [0,5pt]
   (b) En déduire que (d) intercepte (Γ) en deux points à déterminer. [1,5pt]
4. Déterminer l'expression analytique du demi-tour d'axe (d). [1pt]