Lycée de Japoma
Département de Mathématiques 					Année scolaire : 2009/2010

Classe : **T^{le}C** Durée : 4h ; coef : 5
Mars 2010
Epreuve de Mathématiques. 5$^{\text{ème}}$ séquence
Examinateur : **NJIONOU S. P**

L'épreuve comporte trois exercices et un problème, tous obligatoires. La qualité de la rédaction et la cohérence dans le raisonnement seront prises en compte lors de l'évaluation de la copie.

Exercice 1 (4pts).

Soit a un entier naturel qui s'écrit $a = r^{\alpha}s^{\beta}$ avec r et s deux nombres premiers distincts et α, β deux entiers non nuls. Le but de cet exercice est de montrer que $a^n = p^2$ où n est le nombre de diviseurs de a et p est le produit de tous les diviseurs de a.

1. On suppose que $a = 200$
   1.1 Montrer que a n'a que deux facteurs premiers distincts dans sa décomposition. Que valent alors r et s dans ce cas ? [0.5pt]
   1.2 Quel est le nombre de diviseurs n de a. [0.5pt]
   1.3 Déterminer p, produit de tous les diviseurs de a. [0.5pt]
   1.4 Vérifier qu'on a bien $a^n = p^2$ [0.5pt]
2. On suppose à présent que $a = r^{\alpha}s^{\beta}$ (r et s premiers distincts) α et β non nuls.
   2.1 Déterminer n le nombre de diviseurs de a. [0.5pt]
   2.2 Déterminer le produit p de tous les diviseurs de a. [0,75pt]
   (On montrera que $p = r^{\frac{\alpha(\alpha+1)(\beta+1)}{2}} s^{\frac{\beta(\beta+1)(\alpha+1)}{2}}$)
   2.3 Déduire alors que $a^n = p^2$. [0,75pt]

On rappelle que $1 + 2 + ... + \alpha = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}$. On démontre de manière générale que si un enier non nul n admet k diviseurs, le produit p de ces diviseurs est défini par $p^2 = n^k$.

Exercice 2 (3pts).

On se propose de résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre
$y"(x) + y(-x) = x + \cos x$ $(E3)$;

1. On considère les équations $y"(x) + y(x) = \cos x$ $(E4)$ et $y"(x) - y(x) = x$ $(E5)$
   1.1 Résoudre les équations $y"(x) + y(x) = 0$ et $y"(x) - y(x) = 0$. [0.5pt]
   1.2 Montrer que $y(x) = \frac{1}{2}\sin x$ est une solution particulière de $(E4)$ et que $y(x) = -x$ est une solution particulière de $(E5)$. [0.5pt]
   1.3 En déduire les solutions générales de $(E4)$ et de $(E5)$. [0.5pt]
2. *On admettra que toute fonction f se décompose de manière unique comme somme de deux fonctions $f = g + h$ telles que g soit paire et h impaire.*
   2.1 Montrer que $f = g + h$ est solution de $(E3)$ si et seulement si g est solution de $(E4)$ et h est solution de $(E5)$. [1pt]
   2.2 Déduire alors de 2.1 la solution générale de $(E3)$. [0.5pt]

Exercice 3 (4pts).

Dans tout l'exercice, on considère 20 boules indiscernables au toucher (10 boules noires et 10 boules blanches) et deux urnes A et B dans chacune desquelles on placera 10 boules suivant un mode qui sera précisé dans chaque question.

1. On choisit 10 boules au hasard et les met dans l'urne A. On place dix autres boules dans l'urne B.

(a) Quelle est la probabilité pour que les urnes ne contiennent que les boules de même couleur ? [0.5pt]

(b) Quelle est la probabilité pour que les deux urnes contiennent chacune 5 boules blanches et 5 boules noires. [0.5pt]

2. Soit x un entier tel que $0 \leq x \leq 10$. On place maintenant x boules blaches et $10-x$ boules noires dans l'urne A et les $10-x$ boules blanches et x boules noires restantes dans l'urne B. On procède à l'expérience E : on tire au hasard une boule de A et on la met dans B, puis on tire au hasard une boule de B et on la met dans A.
On désigne par M l'événement : « chacune des urnes a la même composition avant et après l'événement E ».
   (a) Pour cette question, on prend $x=6$. Quelle est la probabilité de M ? [0.5pt]
   (b) Montrer que la probabilité de l'événement M est égale à $\frac{1}{55}(-x^2+10x+5)$. [1pt]
   (c) Pour quelle valeur de x l'événement M est-il plus probable que l'événement contraire $\overline{M}$? [0.5pt]
   (d) Pour quelle valeur de x la probabilité de l'événement M est-elle maximale ? Quelle est alors la valeur de cette probabilité ? [1pt]
   On pourra, si on le souhaite, introduire la fonction f, de la variable réelle x, définie sur l'intervalle $[0;10]$ par $f(x)=\frac{1}{55}(-x^2+10x+5)$.

Problème (9pts). Soit f la fonction définie sur $[0,\ +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) & = & \dfrac{x^2+x+1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \text{ pour } x>0 \\ f(0) & = & 0. \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$(unité graphique 5 cm).

Partie A. (3pts)

1. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y=1$ est asymptote à $\mathcal{C}$. [1pt]
2. Pour $x>0$, calculer $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$. Étudier la limite de cette expression quand x tend vers 0. [0.5pt]
   (On pourra utiliser, pour n entier naturel non nul, $\lim\limits_{u\to+\infty} u^n e^{-u}=0$.)
   Que peut-on en déduire pour la fonction f ? Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
3. Démontrer que pour tout x de $]0,+\infty[$ on a $f'(x)=\dfrac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$. [0.5pt]
4. Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau des variations de f. [1pt]

Partie B. (4pts)
On note g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x)=f(x)-xf'(x)$.

1. Montrer que dans $]0\ ;\ +\infty[$, les équations $g(x)=0$ et $x^3+x^2+2x-1=0$ sont équivalentes. [0.5pt]
2. Démontrer que l'équation $x^3+x^2+2x-1=0$ admet une seule racine réelle α dont on justifiera un encadrement à 10^{-2} près. [1pt]
3. On pose $A=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$. Encadrer A à 2×10^{-1} près (justifier) et montrer que $A=f'(\alpha)$.
4. Pour tout $a>0$, on note T_a la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a. Montrer que T_a a pour équation $y=Ax$. Tracer T_a, puis la courbe $\mathcal{C}$. [1pt]

5. Déduire des questions précédentes que de toutes les tangentes T_a à $\mathcal{C}$ (en des points d'abscisses non nulles), seule T_α passe par l'origine O. [0.5pt]
6. On admettra que T_α est au-dessus de $\mathcal{C}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   (a) Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$, suivant le réel m donné. [0.5pt]
   (b) Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = mx$ selon le réel m donné. [0.5pt]

Partie C. (2pts)

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$. Sans calculer explicitement u_n, déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$. En déduire que la suite (u_n) est croissante. [0.5pt]
2. Démontrer que la fonction h, définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}}$ est une primitive de f sur $]0,\ +\infty[$. [0.5pt]
3. Calculer u_n. Interpréter graphiquement le résultat. [0.5pt]
4. Étudier la convergence de la suite (u_n). [0.5pt]