UNIVERSITE DE YAOUNDE I

Ecole Normale Supérieure de Yaoundé

Concours d'entrée en première année du premier cycle

Série : Mathématiques **Epreuve** : Analyse-Algèbre-Probabilités **Durée** : 3h **Session :** 2011

Exercice 1/ 8points

Pour tout réel m, on désigne par (C_m) la courbe représentative de la fonction f_m définie de $[0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = \ln\left(\frac{mx-1}{m-x}\right)$.

1. Déterminer l'intersection de toutes les courbes (C_m). [0,5pt]
2. Déterminer suivant les valeurs de m, le domaine de définition D_m de f_m. [1pt]
3. On suppose que $m \neq 0$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{D}_m$, $f_m(x) = -f_{\frac{1}{m}}(x)$. [0,5pt]
   (b) En déduire une méthode de construction de $(C_{\frac{1}{m}})$ à partir de (C_m). [0,5pt]
4. On pose que $f = f_2$ et $g = f_{-10}$.
   (a) Dresser le tableau de variation de f et de g. [1pt]
   (b) Construire (C_2) et (C_{-10}) dans un même repère orthonormé (unité : 2cm). [1,5pt]
   (c) Déterminer l'aire du domaine (E) des points $M(x,y)$ tels que $\begin{cases} 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$. [1pt]
   (d) Montrer que f est une bijection de D_2 vers $\mathbb{R}$, puis déterminer $f^{-1}(x)$. [1pt]
5. On pose $h(x) = min(f(x), g(x))$. Par simple lecture graphique,
   (a) Déterminer le domaine de définition de h. [0,5pt]
   (b) Représenter distinctement la courbe (C) de h. [0,5pt]

Exercice 2/ 6points

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x + (-\sin x)^n \cos x}{1+\sin x}dx$. Soit $L = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin x}dx$.

1. Déterminer L. [0,5pt]
2. Montrer que $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (-\sin x)^n \cos x dx$, puis calculer $u_{n+1} - u_n$. [0,75pt+0,75pt]
3. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}$. [1pt]
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $|u_n - \ln 2| \leq \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx$. [1pt]
5. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite. [0,5pt+0,5pt]
6. On pose $a_n = (2n+2)(u_{n+1} - u_n)$ et $b_n = \frac{(-1)^n}{u_{n+1}-u_n}$. Montrer que (a_n) est géométrique et que (b_n) est artihmétique. [0,5pt+0,5pt]

Exercice 3/ 3points

1. Montrer que 2011 est un nombre premier. [0,75pt]
2. Déterminer le plus petit nombre premier pluss grand que 2011. [0,75pt]
3. On pose $Z = \left(\dfrac{3-2\sqrt{3}+(2+3\sqrt{3})i}{12+8i}\right)^{2011}$.
   (a) Ecrire $\dfrac{3-2\sqrt{3}+(2+3\sqrt{3})i}{12+8i}$ sous forme algébrique. [0,5pt]

(b) En déduire la partie réelle et la partie imaginaire de Z (sans cosinus, ni sinus). [1pt]

Exercice 4/ 3points

Dans une population, 55% des familles (groupe A) ont une voiture, 80% des familles (groupe B) ont un téléviseur et 15% des familles (groupe C) n'ont ni voiture, ni téléviseur.

1. On choisit hasard une famille de cette population. Déterminer la probabilité que :
   (a) Cette famille ait une voiture et un téléviseur. [0,75pt]
   (b) Cette famille ait un téléviseur sachant qu'elle a une voiture. [0,75pt]
2. On suppose que 5% des familles du groupe A (groupe B non compris) abandonnent leurs voitures, 5% des familles du groupe B (groupe A non compris) abandonnent leurs téléviseurs et 10% des familles du groupe C achètent chacune un téléviseur et une voiture.
   Reprendre les calculs des probabilités ci-dessus. [0,75pt+0,75pt]