UNIVERSITÉ DE DOUALA
Concours d'entrée en Première année

FACULTÉ DE GÉNIE INDUSTRIEL
Épreuve de Mathématiques

Session de Septembre 2011

Durée(Time) : 3 heures(hours)

Baccalauréats C, D, E, GCE A-Level

Exercice 1

En Octobre 2006, la faculté de génie industriel, à son ouverture avait une population de 100 étudiants (élèves ingénieurs). Un bureau d'études de la place en évaluant ses programmes et le système qui sera appliqué (LMD : Licence, Master, Doctorat), prévoit qu'à partir de la rentrée académique 2006 :

- Le nombre d'étudiants augmente chaque année de 10% du fait d'ouverture des nouvelles filières de spécialisation et des différents niveaux d'accès à la FGI (bac et licence) ;
- Du fait des mouvements migratoires (évolution d'un niveau à l'autre, changement d'établissement généralement pour l'étranger, les demissions, les décès et les exclusions), 200 places seront disponibles chaque année dans cette école jusqu'à nouvel avis.

PARTIE A — Pour des besoins de construction des locaux et de leurs extensions la módélisation numérique suivante est adoptée. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le nombre d'étudiants de cette école en octobre de l'année $2006 + n$. Ainsi, $u_0 = 100$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Justifier que, pour tout entier natruerl $n, u_{n+1} = 1,1u_n + 200$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n + 2000$.
   a.) Calculer v_0.
   b.) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   c.) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire u_n.
   d.) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   e.) Peut-on avoir un effectif stable dans cette école ?

PARTIE B — Le but de cette partie est de prévoir l'évolution de la population jusqu'en 2035, en utilisant le modèle de la partie théorique étudié à la **PARTIE A**.

1. Quel sera le nombre d'étudiants de la faculté en octobre 2035 ?
2. À partir de quelle année le nombre d'ingénieurs formés sera de 2000 ?
3. Quel sera le nombre d'ingénieur en octobre 2035 ?

Exercice 2

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(A, \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$, unité graphique 1 cm, on considère les points B, D définis par $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{v}$ et C tel que $ABCD$ soit un rectangle. On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

1. Soit E l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$. Déterminer l'affixe z_E de E.
2. Déterminer les nombres réels a, b tels que le point F d'affixe $z_F = 6 - i$ (i le nombre complexe) soit le barycentre des points A, B, C affectés des nombres des coefficients a, b et 1.

3. On considère la simulitude s qui transforme A en E et B en F. À tout M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z', image de M par s.
   a) Exprimer z' en fontion de z.
   b) Déterminer le centre I, l'angle et le rapport de la similitude.
   c) Déterminer les images de C et de D par s.
   d) Calculer l'aire de l'image par s du rectangle $ABCD$.
4. a) Déterminer l'ensemble (Ω) des points M du plan tels que $\left\|6\overrightarrow{MA} - 10\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 9$.
   b) Déterminer en précisant ses éléments caractéristiques, l'image de (Ω) par s.

PROBLÈME

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

PARTIE I — Soit g_n la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g_n(x) = x - n + \dfrac{n}{2}\ln x$.

1. Étudier les variations de g_n. Puis, déterminer les limites de g_n en 0 et en $+\infty$.
2. a) En déduire l'existence d'un réel positif α_n unique tel que $g_n(\alpha_n) = 0$.
   b) Montrer que $1 \leq \alpha_n \prec e^2$.
   c) Montrer que : $\ln(\alpha_n) = 2 - \dfrac{2}{n}\alpha_n$.
   Exprimer $g_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de α_n et de n. En déduire que $\alpha_{n+1} \succ \alpha_n$
3. a) Montrer que la suite de terme général α_n est convergente. On note L sa limite.
   b) En utilisant 2), calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\alpha_n)$ et en déduire L.

PARTIE II — Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (unité graphique : 2 cm).

On appelle $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f et $\mathcal{C}_0$ la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Puis, calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{g_1(x)}{2x\sqrt{x}}$.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[f(x) - \sqrt{x}\right]$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?
4. Préciser les positions relatives de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_0$?
5. Préciser les positions relatives de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_0$.
6. Dessiner $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_0$.

PARTIE III — Étude de la suite (U_n) définie par $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$

1. Soit $J = \displaystyle\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.
   a) Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties.
   b) En déduire J.

2. Soit k un entier naturel tel que : $0 \leq k \leq n-1$. En utilisant les variations de f sur $[1;+\infty[$, montrer que :
$$\frac{1}{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n} f\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$$
3. En déduire que $U_n - \dfrac{f(2)}{n} \leq J \leq U_n - \dfrac{f(1)}{n}$, puis : $J + \dfrac{f(1)}{n} \leq U_n \leq J + \dfrac{f(2)}{n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.