MINESEC/DRL/DDSM	**EPREUVE DE MATHS**	**Devoir 14 : Séquence 6**
LYCEE DE NDOM	**Niveau: Tle; Série :C**	**Année Scolaire 2010/2011**
Dépmt de Mathématiques	**Coef :5**	**Durée : 4 hrs**

L'épreuve comporte deux exercices et un problème sur deux pages numérotées de 1 à 2.
Le candidat devra obligatoirement traiter l'épreuve. La qualité et le soin apportés aux tracés des courbes seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

Exercice I:Arithmétiques et Calcul intégral (4pts)

n est un entier relatif quelconque, on considère les entiers relatifs a et b définis par :
$a = n^3 - 2n + 5$, $b = n + 1$.

1. Montrer que $PGCD(a, b) = PGCD(b, 6)$. (**0.5pt**)

Pour quelles valeurs de n a-t-on $PGCD(a, b) = 3$? (**0.5pt**)

2. Déterminer n pour que le nombre $\frac{a}{b}$ soit un entier relatif. (**0.5pt**)

3. Soient p et n deux entiers naturels on pose : $I_{n,p} = \int_0^1 x^p(1-x)^n dx$

a) Démontrer que: $\int_0^1 x^n(1-x)^p = \int_0^1 x^p(1-x)^n dx$. (**0.5pt**)

b) Calculer $I_{p,0}$ et et $I_{p,1}$ (**0,5pt**)

c) Calculer $I_{0,n}$ et déduisez-en $I_{1,n}$ (**0,5pt**)

d) Etablissez la relation $I_{p,n} = \frac{n}{p+1} I_{p+1,n-1}$ pour tout $n \geq 1$ (**1pt**)

Exercice 2 (`Suite et fonction`)(5pts)

On définit la fonction f de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln x$

1a) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation (**0,5pt**).

b) Tracer la courbe C_f de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité:$5cm$) (**0,5pt**).

2 a) $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$; calculer $\int_\lambda^1 \ln x dx$ puis en déduire une expression de $I(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)dx$ et la limite $\lim_{n\to 0^+} I(\lambda)$. (**1pt**)

b) Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, on pose $S_n = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} f(\frac{p}{n})$.

En utilisant le sens de variation de f sur $]0, 1]$, montrer que pour tout $1 \leq p \leq n-1$, on a $\frac{1}{n}f(\frac{p+1}{n}) \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n}f(\frac{p}{n})$. (**0,5pt**)

En déduire que $S_n - \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) \leq I(\frac{1}{n}) \leq S_n$ et que $I(\frac{1}{n}) \leq S_n \leq I(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}f(\frac{1}{n})$. (**1pt**)

c) En déduire que $\lim S_n \to +\infty = \frac{1}{3}$. (**0,25pt**)

Problème (12 points)

La partie A est indépendante des parties B et C

Partie A (`Nombres complexes et Suites`) **(4 points)**

(z_n), $n \in \mathbb{N}$ est une suite de nombres complexes. On pose $r_n = |z_n|$ et $\theta_n = argz_n$.

1. Montrer que (z_n) est géométrique si et seulement si (rn) est géométrique et (θ_n) est arimthmétique (**0,75**pt)

2. On pose $z_0 = 8$ et $z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} z_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Exprimer z_n,r_n et θ_n en fonction de n . (**0,75**pt)

b) Placer les points M_1, M_2,et M_3 dans un repère du plan. (**0,5**pt)

c) Calculer $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}$ en fonction de n et en déduire la nature du triangle(OM_nM_{n+1}). (**0,75**pt)

d) Montrer que $|z_{n+1} - z_n| = \sqrt{3}\,|z_{n+1}|$. (**0,5**pt)

e) Calculer la longueur de la ligne brisée reliant les points M_0,M_1,...M_n. (**0,75**pt)

Partie B (`Fonction logaritme Néperien`) (**3 points**)

1. Etudier le sens de variation de la fonction h_1 définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :
$h_1(x) = x - \ln x$. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0, +\infty[$ on a, $h_1(x) \geq 0$ (**0.5pt**)

2. On définit sur l'intervalle $]0, +\infty[$ la fonction f_1 par $f_1(x) = \dfrac{x}{x - \ln x}$.

a) Etudier le sens de variation de la fonction f_1. (**0.5pt**)

b) Etudier les limites de f_1 aux bornes de l'intervalle $]0, +\infty[$ et dresser le tableau de variation de f_1 (**0.75pt**)

3. On considère la fonction φ_1 définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $\begin{cases} \varphi_1(0) = 0 \\ \varphi_1(x) = \quad f_1(x)\, pour\, x \in\,]0, +\infty[\end{cases}$

a) Montrer que φ_1 prolonge f_1 par continuité en 0. (**0.25pt**)

b) Etudier la dérivabilité de φ_1 en 0. En donner une interprétation graphique. (**0.5pt**)

c) Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}_1$ de φ_1 dans un repère orthogonal(unité:4cm) (**0,5pt**)

Partie C(`Fonction logaritme Néperien`) (**5,25 points**)
Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2

1. Etudier le sens de variation de la fonction h_n définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :
$h_n = x^n - \ln x$ (**0.5pt**)
En déduire que pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$ on a: $h_n(x) > 0$. (**0,25**)

2. On définit sur l'intervalle $]0, +\infty[$ la fonction f_n par $f_n(x) = \dfrac{x}{x^n - \ln x}$

a) On définit sur l'intervalle $]0, +\infty[$ la fonction g_n par $g_n(x) = 1 + (1-n)x^n - \ln x$.

i) Montrer que g_n est strictement décroissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$ (**0.5pt**)

ii) Montrer l'existence d'un unique réel a_n de $]0, +\infty[$ tel que $g_n(a_n) = 0$ (**0.5pt**)

iii) Comparer les nombres a_n et 1. Quelle est la valeur de a_2? (**0.5pt**)

b) Démontrer que pour tout x del'intervalle $]0, +\infty[$ on a $f'_n(x) = \dfrac{g_n(x)}{(x^n - \ln x)^2}$ (**0,5**)

c) En déduire le sens de variation de f_n. (**O,25pt**)

d) Etudier les limites de f_n aux bornes de $]0, +\infty[$ et donner le tableau de variation de f_n.(on ne cherchera pas à calculer la valeur de l'extrémum) (**0,75pt**)

e) Montrer que f_n est un prolongement par continuité de φ_n en 0. Etudier la dérivabilité de φ_n en 0. En donner une interprétation graphique.

f) Préciser la valeur de $f_2(a_2)$; puis tracer la représentation graphique $\mathcal{C}_2$ de φ_2 dans un repère orthogonal(unité :4cm) (**0,75pt**)

"Travaillez prenez de la peine... car le succès se trouve au bout de l'effort "

Moualeu Dany Pascal (PLEG Maths)