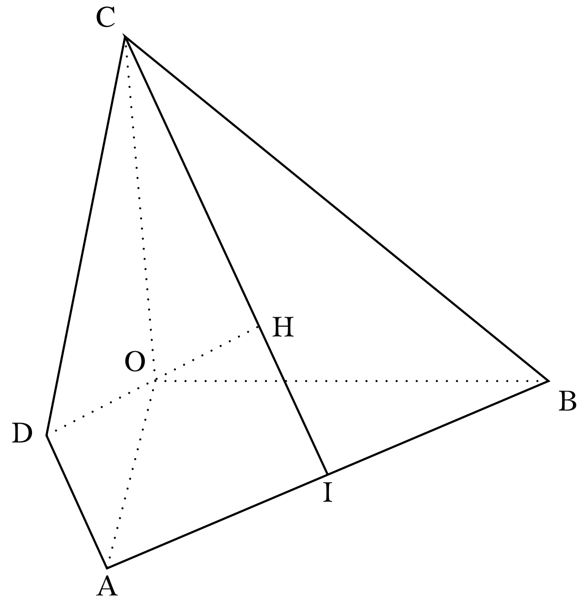
Épreuve de Mathématiques

Enseignant : **Njionou Patrick, S.**

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE 1 **5 points**



Soient a un réel strictement positif et OABC un tétraèdre tel que :

- OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O,
- OA = OB = OC = a.

On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC, et D le point de l'espace défini par $\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OD}$.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ? [0,75pt]

2. Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales, puis que H est l'orthocentre du triangle ABC. [0,5pt]

3. Calcul de OH

a. Calculer le volume V du tétraèdre OABC puis l'aire S du triangle ABC. [0,75pt]

b. Exprimer OH en fonction de V et de S, en déduire que OH = $a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. [1pt]

4. Étude du tétraèdre ABCD.

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O\ ;\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{OA},\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{OB},\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{OC}\right)$.

a. Démontrer que le point H a pour coordonnées : $\left(\dfrac{a}{3},\ \dfrac{a}{3},\ \dfrac{a}{3}\right)$. [0,5pt]

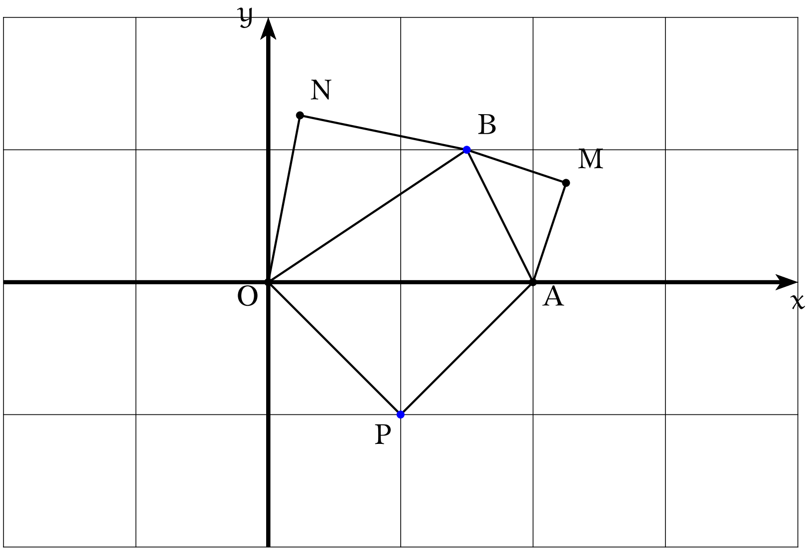
b. Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont même longueur). [0,5pt]

c. Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD. Démontrer que Ω est un point de la droite (OH) puis calculer ses coordonnées. [1pt]

EXERCICE 2 **5 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OJ}\right)$. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2$ et $z_B = \dfrac{3}{2} + i$.

On considère les points M, N et P tels que les triangles AMB, BNO et OPA soient des triangles rectangles isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-dessous.



On note s_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B.

On note s_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N. On considère la transformation $r = s_2 \circ s_1$.

Le but de l'exercice est de démontrer de deux façons différentes que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

1. **À l'aide des transformations**

   a. Donner l'angle et le rapport de s_1 et de s_2. [1pt]

   b. Déterminer l'image du point M puis celle du point I par la transformation r. [0,5pt]

   c. Justifier que r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dont on précisera le centre. [0,5pt]

   d. Quelle est l'image du point O par r ? [0,5pt]

   e. En déduire que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires. [0,5pt]

2. **En utilisant les nombres complexes**

   a. Donner les écritures complexes de s_1 et s_2. On utilisera les résultats de la question 1. a. [0,5pt]

   b. En déduire les affixes z_M et z_N des points M et N. [0,5pt]

   c. Donner, sans justification, l'affixe z_P du point P puis démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires. [1pt]

PROBLEME **8 points**

Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & f(1) = 0 \\ f(x) & = & (\ln x) \times \ln(1-x), \quad \text{pour} \quad x \in]0\ ;\ 1[\end{array}\right.$$

où ln désigne a fonction logarithme népérien. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal. (unité graphique : 10cm).

On admet que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$, ainsi que le résultat suivant :

$$\text{pour} \quad \alpha > 0, \quad \lim_{x \to 0} x^{\alpha} \ln x = 0.$$

Partie A- Étude de la fonction f

1. **a.** Déterminer la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\dfrac{\ln(1-x)}{x}$. [0,25pt]

   b. En déduire la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\dfrac{f(x)}{x}$; que peut-on déduire pour la courbe $\mathcal{C}$? [0,25pt]

2. Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right[$, $\quad f\left(\frac{1}{2} - x\right) = f\left(\frac{1}{2} + x\right)$.

   Que peut-on en conclure pour $\mathcal{C}$? [0,5pt]

3. Soit φ la fonction définie sur $]\,0\,;\,1[$ par :

$$\varphi(x) = (1-x)\ln(1-x) - x\ln x.$$

a. Déterminer $\varphi'(x)$, puis montrer l'égalité $\varphi''(x) = \dfrac{2x-1}{x(1-x)}$; en déduire les variations de φ' sur $]0;1[$. [0,5pt]

b. Montrer que φ' s'annule en deux valeurs α_1 et α_2 sur $]0\,;\,1\,[$ (on ne cherchera pas à calculer ces valeurs). Donner le signe de φ' sur $]0;1[$. [0,5pt]

c. Déterminer la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\varphi(x)$ et la limite quand x tend vers 1 de $\varphi(x)$. Calculer $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)$. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $]0;1[$. [0,5pt]

4. **a.** Montrer que $f'(x)$ a même signe que $\varphi(x)$ sur $]0\,;\,1[$. [0,5pt]

b. Donner le tableau de variations de f. [0,25pt]

c. Montrer que, pour tout $x \in]0\,;\,1[$, les inégalités suivantes sont vraies : [0,5pt]

$$0 < (\ln x) \times \ln(1-x) \leqslant (\ln 2)^2.$$

d. Tracer $\mathcal{C}$. [0,5pt]

Partie B - Encadrement d'une intégrale

Pour $t \in \left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$, on pose :

$$I_1(t) = \int_t^{\frac{1}{2}} x\ln x\,dx, \quad I_2(t) = \int_t^{\frac{1}{2}} x^2\ln x\,dx, \quad I(t) = \int_t^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx.$$

1. **a.** A l'aide d'intégrations par parties, montrer que : [1pt]

$$I_1(t) = -\frac{\ln 2}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{2}t^2\ln t + \frac{t^2}{4}; \quad I_2(t) = -\frac{\ln 2}{24} - \frac{1}{72} - \frac{t^3\ln t}{3} + \frac{t^3}{9}.$$

b. Déterminer les limites de $I_1(t)$ et de $I_2(t)$ quand t tend vers 0. [0,5pt]

2. Soit g et h les fonction définies sur $\left]0;\dfrac{1}{2}\right[$ par

$$g(x) = -\left[x + \frac{x^2}{2}\right] \qquad \text{et} \qquad h(x) = g(x) - \frac{x^2}{2}.$$

a. Etudier sur $\left]0;\dfrac{1}{2}\right[$ les variations de la fonction [0,25pt]

$$x \mapsto \ln(1-x) - g(x).$$

b. En déduire que, pour tout $x \in \left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$: [0,25pt]

$$\ln(1-x) \leqslant g(x).$$

c. Par un procédé analogue, montrer que pour tout $x \in \left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$: [0,5pt]

$$\ln(1-x) \geqslant h(x).$$

d. En déduire un encadrement de $f(x)$ sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$. [0,25pt]

3. **a.** Montrer que $-I_1(t) - \dfrac{1}{2}I_2(t) \leqslant I(t) \leqslant -I_1(t) - I_2(t)$. [0,5pt]

b. En supposant que $I(t)$ admet une limit notée ℓ quand t tend vers 0, donner un encadrement de ℓ. [0,5pt]

« Si l'esprit d'un homme s'égare, faites-lui étudier les mathématiques, car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer. »Franççis Bacon.