**MINESEC**
**Lycée de Japoma**
**Département de Mathématiques**
www.easy-maths.org

**Année scolaire 2011-2012**
**Classe : T $^{le}$ C    Durée : 4 heures**
**Baccalauréat blanc, Mai 2012**
Coef 5

# Épreuve de Mathématiques

Enseignant : **Njionou Patrick, S.**

*Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.*

**EXERCICE 1** **3 points**

Une boîte contient 8 cubes : $\left\{\begin{array}{c}\text{1 gros rouge et 3 petits rouges}\\ \text{2 gros verts et 1 petit vert}\\ \text{1 petit jaune}\end{array}\right.$

Un enfant choisit au hasard et simultanément 3 cubes de la boîte (*on admettra que la probabilité de tirer un cube donné est indépendante de sa taille et de sa couleur*).
*Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.*

1. On note A l'évènement : « obtenir des cubes de couleurs différentes » et B l'évènement : « obtenir au plus un petit cube ».
   **a.** Calculer la probabilité de A. [0,25pt]
   **b.** Vérifier que la probabilité de B est égale à $\dfrac{2}{7}$. [0,25pt]
2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de petits cubes rouges tirés par l'enfant.
   **a.** Déterminer la loi de probabilité de X. [0,75pt]
   **b.** Calculer l'espérance mathématique de X. [0,5pt]
3. L'enfant répète $n$ fois l'épreuve « tirer simultanément trois cubes de la boîte », en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant. Les tirages sont indépendants. On note $P_n$ la probabilité que l'évènement B soit réalisé au moins une fois.
   **a.** Déterminer $P_n$ en fonction de $n$. [0,75pt]
   **b.** Déterminer le plus petit entier $n$ tel que $P_n \geqslant 0,99$. [0,5pt]

**EXERCICE 2** **3 points**

Le plan $(P)$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. On considère l'application f du plan dans lui même qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que $\left\{\begin{array}{l}2x' = x - \sqrt{3}y\\ 2y' = \sqrt{3}x + y\end{array}\right.$.
   **a.** Déterminer l'écriture complexe de f. [0,5pt]
   **b.** Déduire la nature et les caractéristiques de f. [0,5pt]
2. Soit $(\Gamma)$ l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que :

$$31x^2 + 21y^2 + 10\sqrt{3}xy + (36\sqrt{3} - 16)x + (16\sqrt{3} + 36)y = 12$$

   et $(\Gamma')$ son image par f.

**a.** Déterminer une équation de $(\Gamma')$. [0,5pt]

**b.** Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\Gamma')$. [0,5pt]

**c.** En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $(\Gamma)$. [0,5pt]

**d.** Construire $(\Gamma)$ et $(\Gamma')$ dans le plan. [0,5pt]

## EXERCICE 3 — 4 points

*Soit $a$ un entier naturel qui s'écrit $a = r^{\alpha}s^{\beta}$ avec $r$ et $s$ deux nombres premiers distincts et $\alpha, \beta$ deux entiers non nuls. Le but de cet exercice est de montrer que $a^n = p^2$ où $n$ est le nombre de diviseurs de $a$ et $p$ est le produit de tous les diviseurs de $a$.*

1. On suppose que $a = 200$

   **a.** Montrer que $a$ n'a que deux facteurs premiers distincts dans sa décomposition. Que valent alors $r$ et $s$ dans ce cas ? [0.5pt]

   **b.** Quel est le nombre de diviseurs $n$ de $a$. [0.5pt]

   **c.** Déterminer $p$, produit de tous les diviseurs de $a$. [0.5pt]

   **d.** Vérifier qu'on a bien $a^n = p^2$ [0.5pt]

2. On suppose à présent que $a = r^{\alpha}s^{\beta}$ ($r$ et $s$ premiers distincts) $\alpha$ et $\beta$ non nuls.

   **a.** Déterminer $n$ le nombre de diviseurs de $a$. [0.5pt]

   **b.** Déterminer le produit $p$ de tous les diviseurs de $a$. [0,75pt]
   (On montrera que $p = r^{\frac{\alpha(\alpha+1)(\beta+1)}{2}} s^{\frac{\beta(\beta+1)(\alpha+1)}{2}}$)

   **c.** Déduire alors que $a^n = p^2$. [0,75pt]

*On rappelle que $1+2+\ldots+\alpha = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}$. On démontre de manière générale que si un enier non nul $n$ admet $k$ diviseurs, le produit $p$ de ces diviseurs est défini par $p^2 = n^k$.*

## PROBLEME — 10 points

### Partie A : Résolution d'une équation différentielle [2 points]

On considère l'équation différentielle $(E) : y'(x) + y(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$.

1. Résoudre l'équation homogène associée $(H) : y'(x) + y(x) = 0$. [0,5pt]
2. On pose $u(x) = y(x)e^x$. Montrer que $y$ est solution de $(E)$ si et seulement si $u$ est solution d'une équation différentielle de la forme $u'(x) = q(x)$ où $q$ est une fonction que l'on déterminera. [1pt]
3. Déterminer $u$ et en déduire les solutions de $(E)$. Quelle est la solution qui prend la valeur $\ln 2$ en $0$ ? [0,5pt]

### Partie B : étude d'une fonction $f$ et construction de sa courbe [3 points]

Onconsidère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
L'unité graphique est 1cm sur l'axe des abscisses et 10cm sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** On rappelle que : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$. [0,25pt]

   **b.** Vérifier que pour tout réel $x$ : $f(x) = \dfrac{x}{e^x} + e^{-x}\ln(1+e^{-x})$. [0,25pt]

   Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$. [0,25pt]

   **c.** En Déduire que la courbe admet deux asymptotes que l'on précisera. [0,25pt]

2. On considère la fonction $g$ définie sur l'inntervalle $]-1;+\infty[$ par :

$$g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t).$$

**a.** Démontrer que la fonction $g$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, \infty[$. [0,25pt]

**b.** En déduire le signe de $g(t)$ lorsque $t > 0$. [0,25pt]

**3.** **a.** Calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $g(e^x)$, $f'$ désignant la fonction dérivée de $f$. [0,5pt]

**b.** En déduire le sens de variation de la fonction $f$ puis dresser son tableau de variations. [0,5pt]

**4.** Tracer les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$ et la courbe $\mathcal{C}$. [0,5pt]

**Partie C : comportements asymptotiques d'une primitive $F$ de $f$ sur $\mathbb{R}$ [2,5 points]**

Soit $F$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

**1.** Etudier le sens de variations de la fonction $F(x)$. [0,25pt]

**2.** **a.** Vérifier que, pour tout nombre réel $t$, $\dfrac{1}{1+e^t} = 1 - \dfrac{e^t}{1+e^t}$

et calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+e^t}\,dt$. [0,5pt]

**b.** En déduire à l'aide d'une intégration par parties, le calcul de $F(x)$. [0,5pt]

**c.** Vérifier que $F(x)$ peut sécrire sous les formes suivantes : [0,5pt]

$$\begin{array}{lrcl} (1) & F(x) & = & x - \ln(1+e^x) - f(x) + 2\ln 2. \\ (2) & F(x) & = & \ln\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right) - f(x) + 2\ln 2. \end{array}$$

**3.** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. [0,5pt]

**4.** Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} [F(x) - x]$. Donner une interpretation graphique de ce résultat. [0,25pt]

**Partie D : Etude d'une suite [2,5 points]**

Soit $(u_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = \sum_{k=1}^{n} e^{-k}\ln(1+e^k).$$

**1.** Hachurer sur la reprŕesentation graphique un domaine dont l'aire, en unités d'aire, est $u_n$. [0,5pt]

**2.** Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)$. [0,5pt]

**3.** **a.** Justifier que, pour tout entier $k$ tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on a : [0,5pt]

$$f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt.$$

**b.** Comparer $u_n$ et $F(n)$. [0,5pt]

**4.** La suite $(u_n)$ est-elle convergente ? [0,5pt]

*Faites les mathématiques et elles vous feront du bien*