Ministère des enseignements secondaires
Lycée de Nkolnda-Nsimalen
www.easy-maths.org

Examen : Baccalauréat Blanc
Session : 2012 Série : C
Epreuve : MATHÉMATIQUES
Durée : 4 heures Coefficient : 5
Examinateur : Romaric TCHAPNGA

l'épreuve comporte trois éxercices et un problème. Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE I **3,5 points**

Une urne contient deux boules rouges et m boules noires (m entier naturel non nul), indiscernables au toucher et ayant chacune la même probabilité d'apparition.

1. On tire trois boules successivement avec remise, on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.

  a. Donner la loi de probabilité de X. **0,75 pt**

  b. Calculer $E(X)$ espérance mathématique, déterminer m pour que $E(X) = 1,2$. **1 pt**

2. Dans la suite de l'exercice on prend $m = 3$; on tire maintenant les 5 boules de l'urne successivement sans remise. On désigne par Y la variable aléatoire égale au rang de la 1 ère boule noire tirée.

  a. Déterminer la loi de probabilité de Y. **0,75 pt**

  b. Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y. **1 pt**

EXERCICE II **4,5 points**

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \dfrac{3+4\mathrm{i}}{5}\overline{z} + \dfrac{1-2\mathrm{i}}{5}$.

1. On note x et x', y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z'.
Montrer que : $x' = \dfrac{3x+4y+1}{5}$ et $y' = \dfrac{4x-3y-2}{5}$. **1 pt**

2. **a.** Déterminer l'ensemble des points invariants par f. **0,5 pt**

  b. Quelle est la nature de l'application f ? **0,5 pt**

3. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que z' soit réel. **0,5 pt**

4. On cherche à déterminer les points de D dont les coordonnées sont entières.

  a. Donner une solution particulière (x_0, y_0) appartenant a $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x-3y=2$. **0,5 pt**

  b. Determiner l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x-3y=2$. **0,75 pt**

5. On considère les points M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ tels que $x = 1$ et $y \in \mathbb{Z}$. Le point $M' = f(M)$ a pour affixe z'.
Déterminer les entiers y tels que $\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{lm}(z')$ soient entiers. **0,75 pt**

EXERCICE III **2 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\ I;\ J)$. Soit (C) l'ensemble des point $M(xy)$ du plan tel que : $x^2+y^2+2x-4y=0$ et (Δ) la droite d'équation : $y-2=0$.

1. Déterminer l'expréssion analytique de l'affinité orthogonale t d'axe (Δ) et de rapport 2. **0,75 pt**

2. Déterminer la nature et les éléments caractéristique de (C). **0,5 pt**

3. Montrer que l'image (C') de (C) par t est une conique dont on précisera l'équation réduite et l'excentricité. **0,75 pt**

PROBLEME **10 points**

Le problème comporte trois parties indépendantes A, B et C.

Partie A : **4,5 points**

1. Soit x un réel strictement positif, justifier l'existence de $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$. **0,25 pt**

2. Soit F l'application définie en x par : $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$.

   a. Montrer que F est dérivable sur $]0;+\infty[$. **0,5 pt**

   b. Étudier les variations de F sur $]0;+\infty[$. **0,5 pt**

   c. Soit $G : x \longmapsto \displaystyle\int_{2x}^{x^2} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$. Calculer $G'(x)$. **0,75 pt**

3. Montrer que pour tout $x > 1$, $F(x) < \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,dt$. **0,5 pt**

4. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la suite définie par : $U_n = \displaystyle\int_1^n \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$.

   a. Donner le sens de variation de la suite (U_n). **0,5 pt**

   b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\int_1^n \frac{\ln t}{t^2}\,dt$. **0,5 pt**

   c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n < 1 - \dfrac{1+\ln n}{n}$. **0,5 pt**

   d. En déduire que la suite (U_n) est convergente et que $\lim U_n \leq 1$. **0,5 pt**

Partie B : **3 points**

Soient E le plan vectoriel réel rapporté à la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$, h un endomorphisme de E défini par :

$h(x\vec{i} + y\vec{j}) = \left(-x - \dfrac{1}{2}y\right)\vec{i} + (2x+y)\,\vec{j}$.

1. Montrer que $h \circ h$ est un endomorphisme nul. **0,5 pt**
   h est - il un isomorphisme ? Justifier votre réponse. **0,25 pt**

2. Déterminer $Kerh$ et Imh. Comparer $Kerh$ et Imh. **1 pt**

3. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de $Kerh$.

   a. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{v}$ de E tel que $h(\vec{v}) = \vec{u}$. **0,25 pt**

   b. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de E. **0,5 pt**

   c. Ecrire la matrice de h dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$. **0,5 pt**

Partie C : **2,5 points**

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arete 1 tel que $R = \left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ soit un repére orthonormé direct de $\mathscr{W}$. On désigne par I le milieu de $[EF]$ et par J le centre du carré $ADHE$.

1. Vérifier que : $\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BJ}$. **0,5 pt**

2. En déduire l'aire du triangle IGA. **0,5 pt**

3. Déterminer une équation cartésienne du plan (IGA) dans le repère R. **0,5 pt**

4. Calculer le volume du tétraède $ABIG$ puis, de deux manières différentes, calculer la distance du point B au plan (IGA). **1 pt**