MINESEC
Lycée de Nkolnda–Nsimalen
Département de Mathématiques
www.easy-maths.org

Année scolaire : 2012-2013
Classe : T^{le} D **Durée : 4 heures**
Séquence II **Date : 21/11/ 2012**
Coefficient : 04

Épreuve de Mathématiques

Enseignant : **Romaric TCHAPNGA (PLEG)**

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE I **4,5 points**

1. Calculer les limites suivantes : **1,5 pt**
   $a) - \lim\limits_{x \longmapsto +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - 2x\right)$; b) - $\lim\limits_{x \longmapsto +\infty} \dfrac{-x+3\sqrt{x-1}}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$; c) - $\lim\limits_{x \longmapsto \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$.
2. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que :
   $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{1}{2\sqrt{n+2}} \leq \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}$. **1 pt**
3. On considère la fonction h : $x \longmapsto h(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$.
   - **a.** Dresser le tableau de variation de la fonction h sur $\mathbb{R}$. **0,75 pt**
   - **b.** Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α qui appartient à l'intervalle $[-2;-1]$. **0,75 pt**
   - **c.** Donner une valeur approchée à 10^{-2} de la solution α. **0,5 pt**

EXERCICE II **4 points**

1. Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes : **1 pt**
   $a) -$ f : $x \longmapsto f(x) = -x^2 + \sqrt{x^2+1}$; $b) -$ g : $x \longmapsto g(x) = (-x+1)^2\left(3x^2+1\right)^3$.
2. Soit u : $x \longmapsto \sqrt{x^2-2x}$. Etudier les branches infinies de la fonction u à $-\infty$ et à $+\infty$. **1,5 pt**
3. Calculer les intégrales suivantes : **1,5 pts**

$$A = \int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx \ , \quad B = \int_0^1 (x-1)\sqrt{x^2-2x+4}dx \quad \text{et} \quad C = \int_0^{\frac{\pi}{8}} x\sin 2x dx.$$

EXERCICE III **2 points**

On considère la fontion h : $x \longmapsto h(x) = \dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2}$.

1. Determiner l'ensemble de définition de la fonction h. **0,5 pt**
2. Montrer que la fonction h est prolongeable par continuité en 2. **0,75 pt**
3. En déduire une fonction g, prolongement par continuité de h en 2. **0,75 pt**

PROBLEME **9,5 points**

Le problème comporte deux parties indépendantes A et B.

Partie A **5,5 points**

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = 2x + \frac{1}{x-1} \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = 2x^2 - 2x - 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormée $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. **0,5 pt**
2. **a.** Etudier la continuité de la fonction f en 0. **0,75 pt**

   b. Etudier la dérivabilité de la fonction f en 0. **0,75 pt**

   c. Ecrire les équations des démi-tangentes à (C) au point d'abscisse 0. **0,5 pt**

   d. Montrer que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (D) à $-\infty$. **0,75 pt**
3. g désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x + \dfrac{1}{x-1}$. Montrer que le point $\Omega(1;2)$ est le centre de symétrie de la courbe de la fonction g. **0,75 pt**
4. Dresser le tableau des variations de la fonction f. **0,75 pt**
5. Sur la même figure tracer la courbe (C_f), la droite (D) et les démi-tangentes au point d'abscisse 0. **0,75 pt**

Partie B **4 points**

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 9$ et pour tout n , $U_{n+1} = \dfrac{8U_n - 6}{U_n + 1}$.

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \geq 1$. **0,5 pt**
2. Montrer que la suite (U_n) est décroissante. **0,5 pt**
3. Endéduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite. **0,5 pt**
4. Soit (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \dfrac{U_n - 6}{U_n - 1}$.

   a. Montrer que la suite (V_n) est géométrique. Préciser son premier terme. **0,75 pt**

   b. Exprimer V_n, puis U_n en fonction de n. **1 pt**

   c. Etudier la convergence de la suite (U_n). **0,25 pt**

   d. Exprimer $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$ en fonction de n puis calculer $\lim S_n$. **0,5 pt**