Épreuve de Mathématiques

Enseignant : **Njionou Patrick, S.**

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE 1 **3 points**

(C) est un cercle de centre O et A un point de (C). Soit M un point de (C) et P le point tel que $[MP]$ est un diamètre de (C). La droite (AP) et la parallèle à (OA) passant par M se coupent en un point N.

1. Faire une figure. [0,75pt]
2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaire. [0,75pt]
3. Montrer qu'il existe une translation dont on déterminera le vecteur qui transforme M en N. [0,75pt]
4. En déduire le lieu géométrique des points N lorsque M parcourt (C). [0,75pt]

EXERCICE 2 **4 points**

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

Dans le plan orienté, ABCD est un carré direct $\left(\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\right)$. On note I son centre et J le milieu de [AI].

1. C est le barycentre des points pondérés (A, m), (B, 1) et (D, 1) lorsque :
   a. $m = -2$ **b.** $m = 2$ **c.** $m = -1$ **d.** $m = 3$
2. **a.** B est l'image de C par la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   b. Le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme I en J est $\dfrac{2}{3}$.
   c. Le triangle DAB est invariant par la symétrie de centre I.
   d. J est l'image de I par la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{DB}}$.
3. L'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}}\| = \mathrm{AB}$ est :
   a. la médiatrice de [AC].
   b. le cercle circonscrit au carré ABCD.
   c. la médiatrice de [AI].
   d. le cercle inscrit dans le carré ABCD.
4. L'ensemble des points M du plan tels que : $\left(2\overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{M\mathrm{D}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{M\mathrm{A}} - \overrightarrow{M\mathrm{C}}\right) = 0$ est :
   a. la médiatrice de [AC].
   b. le cercle circonscrit au carré ABCD.
   c. la médiatrice de [AI].
   d. le cercle inscrit dans le carré ABCD.

EXERCICE 3 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).
On considère les points A, B et C d' affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = -\frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \; z_{\mathrm{B}} = \overline{z_{\mathrm{A}}} \text{ et } z_{\mathrm{C}} = -3.$$

Partie A

1. Écrire les nombres complexes z_{A} et z_{B} sous forme exponentielle. [0.75pt]
2. Placer les points A, B et C. [0.75pt]
3. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral. [0.5pt]

Partie B. Soit f l'application qui, à tout point M du plan d'aflixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{3}\mathrm{i}z^2$. On note O$'$, A$'$, B$'$ et C$'$ les points respectivement associés par f aux points O, A, B et C.

1. **a.** Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A$'$, B$'$ et C$'$. [0.75pt]
   b. Placer les points A$'$, B$'$ et C$'$. [0.25pt]
   c. Démontrer l'alignement des points O, A et B$'$ ainsi que celui des points O, B et A$'$. [0.5pt]
   d. Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C. On note G$'$ le point associé à G par f.
   Déterminer les affixes des points G et G$'$. [0.5pt]
   Le point G$'$ est-il l'isobarycentre des points O$'$ A$'$, B$'$ et C$'$? [0.5pt]
2. Démontrer que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$. (On ne demande pas de tracer cette parabole) [0.5pt]

EXERCICE 4 **8 points**

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 - |x-1|}{(x+1)^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f. [0.5pt]
2. Ecrire f sans symbole de valeurs absolues et calculer les limites de f aux bornes du domaine de définition. [1.5pt]
3. Etudier la continuité de la dérivabilité de f sur son domaine de définition. [2pt]
4. Dresser le tableau de variation de f. [0.5pt]
5. Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On prendra pour unité sur les axes $1cm$. [1pt]
6. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dont on déterminera les signes. On notera α la plus petite des deux solutions. [1pt]
7. Déterminer par la dichotomie une valeur approchée de α à 10^{-2} près. [0.5pt]
8. Discuter suivant le réel m le nombre de solutions de l'équation $(1-m)x^2 - 2mx - |x-1| = m$. [1.5pt]

« Si l'esprit d'un homme s'égare, faites-lui étudier les mathématiques, car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer. »Françis Bacon.