MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES | **Année scolaire : 2012-2013**
Lycée de Nkolnda-Nsimalen | **Série : D** **Durée : 4 heures**
Baccalauréat BLANC N°1 | **Session de : Mars 2013**
Epeuve de : MATHÉMATIQUES | **Coefficient : 04**
www.easy-maths.org | **Examinateur : Romaric TCHAPNGA**

L'épreuve comporte trois exercices et un problème. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

EXERCICE I **7 points**

I - On considère l'équation (E) $z^3-(4+\mathrm{i})z^2+(7+\mathrm{i})z-4=0$ où z désigne un nombre complexe.

1. **a.** Montrer que (E) admet une solution réelle, note z_1. **0,75 pt**

   b. Déterminer les deux nombres complexes a et b tel que, pour tout nombre complexe z on ait : $z^3-(4+\mathrm{i})z^2+(7+\mathrm{i})z-4=(z-z_1)(z^2+az+b)$. **0,75 pt**

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). **0,5 pt**

II - Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les trois points A, B et C d'affixes respectives 1, $2+2\mathrm{i}$ et $1-\mathrm{i}$.

1. Représenter A, B et C. **0,5 pt**
2. Déterminer le module et un argument de $\dfrac{2+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$. En déduire la nature du triangle OBC. **0,75 pt**
3. Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ? Justifier votre affirmation. **0,5 pt**
4. Soit D l'image de O par la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et de centre C. Montrer que le point D a pour affixe de 2. **0,5 pt**
5. Quelle est. la nature de OCDB ? **0,5 pt**
6. Déterminer l'écriture complexe puis les éléments caractéristiques de la la similitude s de centre O qui transforme B en D. **0,75 pt**

III - A tout complexe $\mathrm{M}(z)$ différent de C on associe le complexe $\mathrm{M}'(z')$ tel que $z'=\dfrac{z-2\mathrm{i}-2}{z-1+\mathrm{i}}$.

1. Soit (Γ) l'ensemble des points M d'affixe z tel que z' soit imaginaire pur.
   Montrer que $\mathrm{O}\in(\Gamma)$. Déterminer l'ensemble (Γ). **0,75 pt**
2. Déterminer l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tel que $|z'|=1$. **0,75 pt**

EXERCICE II **3 points**

1. A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-2\mathrm{t}}\cos 2\mathrm{t}\,\mathrm{dt}=\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}+1\right)$. **1 pt**

2. On donne $E=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-2\mathrm{t}}\cos^2 \mathrm{t}\,\mathrm{dt}$ et $F=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-2\mathrm{t}}\sin^2 \mathrm{t}\,\mathrm{dt}$.

   a. Calculer $E+F$ et $E-F$. **1 pt**

   b. En déduire les valeurs exactes de E et de F. **1 pt**

PROBLEME **10 points**

Partie A : Equations différentielles

On considère les équations différentielles $(E):\ 4y''+4y'+y=x+4$ et $(E'):\ 4y''+4y'+y=0$.

1. On pose $u(x) = ax + b$.
Déterminer les réels a et b pour que la fonction u soit une solution de l'équation (E). **0,75 pt**

2. Montrer qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - u$ est solution de l'équation (E'). **0,75 pt**

3. Résoudre l'équation (E') et déterminer une solution φ de (E) tel que $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = \dfrac{1}{2}$. **1 pt**

Partie B : Point fixe de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)e^{-\frac{x}{2}}$.
On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation sur $[0\,;\,+\infty[$. **1 pt**

   b. Etudier le signe de la fonction f. **0,5 pt**

   c. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$. **0,75 pt**

   d. Tracer la courbe (C) dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

2. Soit D le domaine du plan délimité par les droites d'équation $x = 8$, $x = 0$, l'axe des abscisses et la courbe (C). Calculer en unité d'aire l'aire du domaine D. **0,75 pt**

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - x$.

   a. Dresser le tableau de variation de la dérivée g' de g sur $\mathbb{R}$. **0,5 pt**

   b. Montrer que l'équation $g'(x) = 0$ admet dans $]-0,6\,;\,-0,5[$ une unique solution. **0,5 pt**

   c. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution positive α dans l'intervalle $[1\,;\,2]$. **0,5 pt**

4. Soit (U_n) la suite numérique définie par : $U_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n)$.

   a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n„ $U_n \geq 0$. **0,5 pt**

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n $|U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|U_n - \alpha|$. **0,75 pt**

   c. Et déduire par récurrence, que : $|U_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}$. **0,75 pt**

   d. En déduire que la suite (U_n) converge et donner sa limite. **0,5 pt**

   e. Déterminer le plus petit entier n_1 tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1 \implies |U_n - \alpha| < 10^{-6}$. **0,5 pt**