MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
Lycée de Nkolnda-Nsimalen
Baccalauréat BLANC N°1
Epeuve de : MATHÉMATIQUES
www.easy-maths.org

Année scolaire : 2012-2013
Série : C Durée : 4 heures
Session de : Mars 2013
Coefficient : 05
Examinateur : Romaric TCHAPNGA

L'épreuve comporte trois exercices et un problème. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

EXERCICE I **5 points**

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 5 cm).

On considère les points A d'affixe $\sqrt{2}$, et B d'affixe i. Soit C le point tel que OACB soit un rectangle. On note I le milieu du segment [OA], J le milieu du segment [BC] et K le milieu du segment [AI].

Placer ces points sur une figure.

1. Soit s la similitude d'écriture complexe $z' = -i\frac{\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$.
   a. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude s. **0,5 pt**
   b. Determiner les images par s des points O, A, B, C. **1 pt**
2. a. Montrer que les points A, B et Ω sont alignés. **0,5 pt**
   b. Montrer de même que les points I, C, Ω sont alignés. **0,5 pt**
   c. En déduire une construction de Ω. Placer Ω sur la figure. **0,5 pt**
3. a. Montrer que Ω appartient aux cercles Γ_1 et Γ_2 de diamètres respectifs [BC] et [AI]. **0,5 pt**
   b. Montrer que $\overrightarrow{J\Omega}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont colinéaires. **0,5 pt**
   c. Montrer que la droite (ΩO) est la tangente commune à Γ_1 et Γ_2. **0,5 pt**
   Représenter les cercles Γ_1, Γ_2 et la droite (ΩO) sur la figure. **0,5 pt**

EXERCICE II **4 points**

Une suite (S_n) est définie pour $n > 0$ par $S_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$. On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul n, le plus grand commun diviseur de S_n et S_{n+1}.

1. Montrer que, pour tout $n > 0$, on a : $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. **0,75 pt**
2. On suppose que n est pair. Soit q l'entier naturel non nul tel que $n = 2q$.
   a. Montrer que $\text{PGCD}(S_{2q}\,;\,S_{2q+1}) = (2q+1)^2\text{PGCD}\left(q^2\,;\,(q+1)^2\right)$. **0,75 pt**
   b. Calculer PGCD $(q\,;\,q+1)$.Puis calculer $\text{PGCD}\left(S_{2q}\,;\,S_{2q+1}\right)$. **1 pt**
3. On suppose que n est impair. Soit q l'entier naturel non nul tel que $n = 2q+1$.
   a. Montrer que les entiers $2q+1$ et $2q+3$ sont premiers entre eux. **0,25 pt**
   b. Calculer $\text{PGCD}\left(S_{2q+1}\,;\,S_{2q+2}\right)$. **0,5 pt**
4. Déduire qu'il existe une unique valeur de n, que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux. **0,75 pt**

EXERCICE III **3,5 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Soit A le point de coordonnées $(-2:0)$ et $\overrightarrow{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{i} - \frac{1}{2}\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{j}$.

1. Montrer que l'expression analytique de l'affinité orthogonale f d'axe (Δ) : $x=-2$ et de rapport $\frac{1}{2}$ est : $\left\{\begin{array}{lll} x' & = & \frac{1}{2}x-1 \\ y' & = & y \end{array}\right.$. **0,75 pt**
2. Déterminer une équation réduite de l'image (Γ) du cercle de centre A et de rayon 2 par l'affinité f. Preciser ses éléments caractéristiques. **1 pt**
3. Soit (C) l'ensemble des points m(x :y) dans $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$d'équation : $13x^2+7y^2+6xy\sqrt{3}+32x\sqrt{3}+32y+48=0$.
   a. Déterminer une équation réduite de (C) dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. **1 pt**
   b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (C). **0,75 pt**

PROBLEME **7,5 points**

Le problème comporte deux parties indépendantes A et B.

Partie A : On considère la fonction numérique f définie sur $]-\infty\,;\,1[$ par : $f(x)=\frac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}$.
On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, l'unité graphique étant 2 cm.

1. Calculer les limites de f aux bornes de $]-\infty\,;\,1[$. **0,5 pt**
2. En déduire une asymptote à la courbe (C_f). **0,25 pt**
3. Dresser le tableau des variations de la fonction f. **0,75 pt**
4. Tracer la courbe (C_f). **0,5 pt**
5. Déterminer une primitive de f sur $]-\infty\,;\,1[$. **0,5 pt**
6. Soit α réel tel que $0<\alpha<1$, déterminer : $g(\alpha)=\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$. puis calculer la limite de $g(\alpha)$ quand α tend vers 1 ? **0,75 pt**
7. Quelle est l'aire en cm^2 du domaine limité par la courbe de f, l'axe des abscisses, les droites d'équations respectives $x=-\alpha$ et $x=\alpha$? **0,5 pt**
8. **a.** Montrer que l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ a deux solutions dont l'une est - 1. **0,5 pt**
   b. On notera β l'autre solution. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de β. **0,5 pt**
9. Soit a un élément de $]-\infty\,;\,1[$. Déterminer graphiquement, en fonction de a, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=f(a)$. **0,5 pt**

Partie B :
On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1, I designe le centre de gravité de CFH.

1. **a.** Montrer que les points A, G et I appartiennent au plan médiateur de [CH] et à celui de [CF]. **0,75pt**
   b. En déduire que la droite (AG) est orthogonale au plan (CFH) et qu'elle passe par le point I. **0,5 pt**
2. On considère le repère orthonormé direct de l'espace $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$
   a. Calculer le volume du tétraède CFGI. **0,25 pt**
   b. En déduire la distance de G au plan (CFH). **0,25 pt**
3. $S_{(ABG)}$ et $S_{(EFC)}$ désignent les reflexions respectivement par rapport au plan (ABG) et (EFC). Donner la nature de $S_{(ABG)}\circ S_{(EFC)}$. **0,5pt**