Épreuve de Mathématiques

Enseignant : **Njionou Patrick, S.**

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE 1 **3 points**

I- On considère l'équation :

$$8X + 5Y = 100 \quad [E']$$

d'inconnue le couple d'entiers relatifs $(X,\ Y)$.

1. Résoudre $[E']$. [0,75pt]
2. Au VIII^e siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge (*L'histoire ne révèle pas ce qu'ils faisaient*). Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ? [0,75pt]

II- L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. On considère les points $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$ et $C(0,0,4)$.

1. Donner une équation cartésienne du plan (ABC). [0,5pt]
2. Déterminer l'expression analytique de la symétrié orthogonale $s_{(ABC)}$ par rapport au plan (ABC). [0,75pt]
3. Déterminer l'image de O par $s_{(ABC)}$. [0,25pt]

EXERCICE 2 **3 points**

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. On considère la courbe d'équation (Γ) d'équation $31x^2 - 10\sqrt{3}xy + 21y^2 = 64$. On se propose de déterminer la nature exacte de (Γ).

1. θ est un nombre réel.
   - **a.** Déterminer l'écriture complexe de la rotation r de centre O et d'angle θ. [0,5pt]
   - **b.** En déduire que pour $M'(x',y')$ image de $M(x,y)$ par r, alors on a

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta. \end{cases}$$

[0,5pt]

2. Soit (Γ'), l'image de (Γ) par r.
   - **a.** Déterminer une équation de (Γ'). [0,5pt]
   - **b.** Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles (Γ') est une ellipse. [0,5pt]
   - **c.** On suppose que $\theta = \frac{\pi}{6}$. Déterminer les éléments caractéristiques de (Γ'). [0,5pt]
   - **d.** Construire (Γ) et (Γ') dans le plan. [0,5pt]

EXERCICE 3 **3 points**

On considère trois urnes U, V et W contenant chacune des boules portant le numéro 1 ou le numéro 2. La probabilité de tirer une boule numérotée 1 de U est $P_1 = 0,4$; celle de tirer 1 de V est $P_2 = 0,5$ et enfin celle de tirer 1 de W est $P_3 = 0,7$. Un jeu consiste à tirer une boule de chaque urne :

– Dans U, une boule n°1 tirée fait gagner 40 F tandis que la n°2 fait perdre 60F ;
– Dans V, une boule n°1 tirée fait gagner 50 F tandis que la n°2 fait perdre 50F ;
– Dans W, une boule n°1 tirée fait gagner 70 F tandis que la n°2 fait perdre 30F ;

1. Quelles sont les sommes possibles qu'un joueur peut avoir à l'issu de ce jeu ? [0,5pt]
2. On appelle X la variable aléatoire réelle donnant la somme algébrique (en franc) obtenue par un joueur à la fin des tirage.
   a. Définir la loi de probabilité de X. [0,5pt]
   b. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$. [0,5pt]
3. Déterminer la probabilité pour qu'à la fin des trois tirages, un joueur ait une somme algébrique strictement positive ($P(X > 0)$). [0,5pt]
   Lorsque $X > 0$, on dit que le joueur a gagné, et dans le cas contraire le joueur a perdu.
4. On réitère le jeu n fois et on appelle Y la variable aléatoire donnant le nombre de fois que le joueur gagne au cours de n tirages.
   a. Déterminer la loi de probabilité de Y. [0,5pt]
   b. Déterminer l'espérance mathématique et l'écart type de Y. [0,5pt]

PROBLEME **11 points**

Partie A : Résolution de l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = xe^x$

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$. [0,5pt]
2. Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^x$.
   a. Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1). [0,5pt]
   b. Montrer que v est une solution de l'équation (2) si, et seulement si, $u + v$ est solution de (1). [0,5pt]
   c. En déduire l'ensemble des solutions de (1). [0,5pt]
3. Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0. [0,5pt]

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1. Déterminer la limite de g en - ∞ et la limite de g en + ∞. [0,5pt]
2. Étudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variations. [0,5pt]
3. On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.
   a. Vérifier que 0 est l'une de ces solutions. [0,25pt]
   b. L'autre solution est appelée α. On se propose de déterminer une valeur approchée de α. On pose $h(x) = 2(e^x - 1)$ et on définit la suite (u_n) par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
      i. Montrer que $g(x) = 0 \iff x = h(x)$. [0,25pt]
      ii. Montrer que $\alpha \in [-2; -1]$. (*On pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiares*). [0,25pt]
      iii. Montrer que $h([-2; -1]) \subset [-2; -1]$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-2; -1]$. [0,25pt]
      iv. Montrer que $\forall x \in [-2; -1]$, $|h'(x)| \leq 0,8$. [0,25pt]
      v. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,8|u_n - \alpha|$. [0,25pt]
      vi. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq (0,8)^n$. [0,25pt]
      vii. Calculer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$. [0,25pt]
      viii. Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près. [0,25pt]
4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x. [0,5pt]

Partie C : Étude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$.

1. Déterminer la limite de f en $- \infty$ et la limite de f en $+ \infty$. (*On pourra mettre e^{2x} en facteur.*) [0,5pt]

2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Étudier le sens de variation de f. [0,5pt]

3. Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ où α est défini dans la partie **B**. [0,5pt]
   En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. (*On rappelle que* $-1,6 \leqslant \alpha \leqslant -1,5$.) [0,25pt]

4. Établir le tableau de variations de f. [0,5pt]

5. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$, représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm). [0,5pt]

Partie D : Calcul d'aire

1. Soit m un réel négatif. Interpréter graphiquement l'intégrale $\int_m^0 f(x)\,\mathrm{d}x$. (On justifiera la réponse.) [0,5pt]

2. **a.** Calculer $\int_m^0 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, à l'aide d'une intégration par parties. [0,5pt]

   b. En déduire $\int_m^0 f(x)\,\mathrm{d}x$. [0,5pt]

3. Calculer la limite de $\int_m^0 f(x)\,\mathrm{d}x$, lorsque m tend vers $-\infty$. [0,5pt]

« Si l'esprit d'un homme s'égare, faites-lui étudier les mathématiques, car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer. »Françis Bacon.