Republique du Cameroun
Paix-Travail-Patrie
Ministère de l'Enseignement Supérieur
Université de Douala
Faculté de Génie Industriel

Republic of Cameroon
Peace-Work-fatherland
Ministry Of Higher Education
University Of Douala
Faculty Of Industrial Engineering

Année Académique 2012-2013
Academic Year 2012-2013

CONCOURS D'ENTREE EN 1ère ANNEE, SESSION DE SEPTEMPBRE 2012
FIRST YEAR ENTRANCE EXAMINATION, SEPTEMBER SESSION 2012

EPREUVE DE (PAPER OF) : MATHEMATIQUES (METHEMATICS) BAC : C, D, E
Durée (Time) : 3 heures (hours)

Exercice 1 **[4points]**

Les résultats seront donnés à 10^{-3} près par excès. Une entreprise en matériel informatique fabrique des disquettes $3,5$ pouces. 4% des disquettes sont défectueuses. A l'issue de cette fabrication les disquettes sont contrôlées et triées en trois lots.

- Disquettes marquées, celle-ci portent la marque de l'entreprise ;
- Disquettes démarquées
- Détruire.

PARTIE A : L'unité de contrôle rejette 3% des bonnes disquettes et 95% des disquettes deffectueuses.

1. Quelle est la probabilité p_1 pour qu'une disquette soit deffectueuse et acceptée ?
2. Quelle est la probabilité p_2 pour qu'une disquette soit bonne et refutée ?
3. Quelle est la probabilité p_3 pour qu'il y ait une erreur de contrôle ?
4. Montrer que la probabilité p_4 pour qu'une disquette soit acceptée est égale à $0,933$.

PARTIE B : Le contrôle s'effectue par cinq tests successifs. Une disquette recoit la marque de l'entreprise si elle subit avec succès les 5 contrôles successifs, détruite si elle refuse au moins deux fois et démarquée sinon.

1. Quelle est la probabilité p_5 pour qu'une disquette soit démarquée ?
2. Quelle est la probabilité p_6 pour qu'une disquette recoive la marque de l'entreprise ?
3. Quelle est la probabilité p_7 pour qu'une disquette soit détruire ?

Exercice 2 **[6 points]**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique $2cm$, on considère l'ensemble E des points M d'affixe z tels que

$$|z - 1 - i| = \frac{1}{4}|z + i\bar{z} - 8(1 + i)|.$$

1. Soit P l'application du plan dans lui même, qui à un point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que
$$z' = \frac{1}{2}\left(z - i\bar{z} + 8(1 + i)\right).$$
On pourra poser $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x', y' sont des réels.
   (a) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $P(M) = M$.

(b) Montrer que pour tout point M, les coordonnées du point M' vérifient l'équation $x'+y'-8=0$. On appellera D la droite décrite par les points M'.

(c) Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ est un vercteur normal à la droite (D). Caractériser géométriquement l'application P.

2. On se propose de déterminer l'ensemble E défini au début de l'exercice.

(a) Montrer que $z-z'=\dfrac{1}{2}\left(z-i\bar{z}-8(1+i)\right)$.

(b) En déduire que l'ensemble E est une ellipse de foyer F d'affixe $1+i$, de génératrice (D) et d'excentricité $\dfrac{1}{2}$. Préciser l'axe focal.

(c) Vérifier que les points A et A' d'affixes respectives $2+2i$ et $-2-2i$ sont deux sommets de E.

3. Allure de l'ensemble E.

(a) Construire dans un repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ la droite (D), l'axe focal, les points A, A' et F.

(b) Déterminer géométriquement les deux autres sommets de l'ellipse.

(c) Donner l'allure de E.

PROBLEME **[10 points]**

Partie I : On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{2x}{1+x}-\ln(1+x).$$

1. Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
Pour l'étude de la limite -1, on remarquera que $f(x)=\dfrac{2x-(1+x)\ln(1+x))}{1+x}$.
2. Etudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variation de f.
3. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet, dans l'intervalle $]1;+\infty[$ une solution unique notée α. Vérifier qu'une valeur décimale approchée de α à 10^{-1} près est $3,9$.
4. Préciser, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$.

Partie II : Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(0)=0$ et $g(t)=\dfrac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}$ si $t>0$.

1. Démontrer que g est continue sur $[0;+\infty[$. Etudier la dérivabilité de g en 0.
2. Montrer que pour tout réel t strictement, on a : $g'(t)=\dfrac{1}{2t\sqrt{t}}f(t)$.
3. (a) Calculer la limite de g en $+\infty$. On remarquera que pour tout $t>0$: $\ln(1+t)=\ln t+\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)$.

(b) Dresser le tableau de variation de g.

4. Le plan est rapporté au repère orthogonal (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$). On prendra pour unités : $1cm$ sur l'axe $(O,\vec{i})$ et $10cm$ sur l'axe $(O,\vec{j})$. Construire la courbe (Γ) représentative de g.

Partie III : *Cette partie a pour objectif de déterminer l'aire $\mathcal{A}$, en unité d'aire, du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe (Γ) et la droite $x=1$.*

1. (a) Démontrer que la fonction g_1 définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g_1(x)=\sqrt{x}\ln(1+x)$ est dérivable en 0.

(b) Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = 2\sqrt{x}\ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt.$$

Montrer que φ est dérivable en tout point de l'intervalle $[0; +\infty[$ et que $\varphi'(x) = g(x)$.

2. En déduire que $A = 2\ln 2 - \displaystyle\int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$.

3. *Le but de cette question est de calculer* $\displaystyle\int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$.

   Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $h(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$ et k la fonction définie sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ par $k(\theta) = \tan^2\theta$.

   (a) Calculer $(h \circ k)(0)$

   (b) Prouver que, pour tout θ appartenant à I, $(h \circ k)'(\theta) = 4\tan^2\theta$.

   (c) En écrivant $\tan^2\theta$ sous la forme $(\tan^2\theta + 1) - 1$, déterminer une primitive de $(h \circ k)'$ puis donne l'expression de $(h \circ k)$.

   (d) Calculer $h(1)$.

4. Déduire des résultats précédents la valeur exacte de A.