Épreuve de Mathématiques

Enseignants : Kahatchop A. & Njionou Patrick, S.

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE 1

8 points

Partie A. On considère le polynôme P de la variable complexe z définie par :

$$P(z) = z^4 + 2\sqrt{3}z^3 + 8z^2 + 2\sqrt{3}z + 7.$$

1. a. Calculer $P(i)$ et $P(-i)$. [1pt]
b. Démontrer qu'il existe un polynôme Q du second degré, que l'on déterminera, tel que : [1pt]

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z^2 + 1)Q(z).$$

2. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$. [1pt]

Partie B. Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Placer dans ce repère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = i, z_B = -i, z_C = -\sqrt{3} + 2i$ et $z_D = -\sqrt{3} - 2i$. [1pt]
Démontrer que les quatre points appartiennent au cercle de diamètre $[CD]$. [1pt]
2. Démontrer qu'il existe une rotation de centre O qui transforme C en D . [0,75pt]
Calculer une valeur approchée à un degré près d'une mesure de l'angle de rotation. [0,75pt]
3. Calculer sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique, le rapport $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$. Interpréter géométriquement le module et le rapport. [1,5pt]

EXERCICE 2

5 points

On considère la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ et on désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de u aux bornes de son ensemble de définition. [1pt]
2. a. Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}$. [1pt]
b. Etudier suivant les valeurs de x , la position relative de $\mathcal{C}$ et de la droite d'équation $(D) : y = -2x$. [1pt]
c. Calculer les limites suivantes [2pts]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}, \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x}.$$

EXERCICE 3

7 points

1. Démontrer par récurrence les égalités suivantes : [0,75 pt $\times$ 4=3pts]

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}; & \text{c. } \sum_{k=1}^n k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1; \\ \text{b. } \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}; & \text{d. } \sum_{k=1}^n k(n-k^2) = \frac{n^2(1-n^2)}{4}. \end{array}$$

2. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on a : $2^n > 5(n+1)$. [1pt]
3. Ecrire en base deux les nombres suivants : 85, 104 ; 3407. [1pt]
4. Ecrire dans le système décimal les nombres suivants, écrits en base deux ou trois : $\overline{10110}^2$; $\overline{111000}^2$; $\overline{12121012}^3$; $\overline{210100211}^3$. [0,5 $\times$ 4=2pts]

« Si l'esprit d'un homme s'égare, faites-lui étudier les mathématiques, car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer. » François Bacon.