MINESEC
DRES LITTORAL
DDES MOUNGO
BASSIN PEDAGOGIQUE Mbanga/Mombo
www.easy-maths.org

NIVEAU : Tle C
DUREE : 04 Hrs
COEF : 05
Année académique : 2013/2014

EVALUATION HARMONISEE DE LA 2^{eme} SEQUENCE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice 1: ***05 points***

Les parties $I.$ et $II.$ sont indépendantes.
Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

I. Soit $\theta \in]-\pi, 0[$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 + 2(1-\cos\theta)z + 2 - 2\cos\theta = 0$. [0,75pt]
2. Soit z_1 la solution de (E) dont la partie imaginaire est négative et z_2 l'autre solution. On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2.
   a) D'éterminer l'écriture exponentielle de z_1 et z_2. [0,75pt]
   b) En déduire la nature du triangle OM_1M_2. [0,25pt]
   c) Pour quelles valeurs de θ, le triangle OM_1M_2 est équilatéral? [0,5pt]

II. On donne les points A et B d'affixes respectives 1 et -1. A tout point M d'affixe $z \neq 1$, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-1}{1-\bar{z}}$.

1. a) Etablir que $|z'| = 1$. Interpréter géométriquement ce résultat. [0,75pt]
   b) Etablir que $\frac{z'-1}{z-1}$ est un réel. Interpréter géométriquement ce résultat. [0,75pt]
   c) Etablir que $\frac{z'+1}{z-1}$ est imaginaire pur. Interpréter géométriquement ce résultat. [0,75pt]
2. Donner le programme de construire de M' connaissant M. [0,5pt]

Exercice 2: ***6 points***

Les parties $I.$, $II.$ et $III.$ sont indépendantes.

On rappelle le petit théorème de Fermat suivant: "Soit p un entier naturel premier, et a un entier naturel premier avec p. Alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$."

I. On se propose de déterminer quelques diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

1. En utilisant le petit théorème de Fermat, montrer que $4^{28} - 1 \equiv 0[29]$. [0,5pt]
2. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $4^{4k} - 1 \equiv 0[17]$. [0,5pt]
3. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, $4^n - 1 \equiv 0[5]$? [0,5pt]
4. Montrer que si a, b et c sont trois entiers non nuls tels que a divise c, b divise c et $PGCD(a, b) = 1$, alors ab divise c. [0,5pt]
5. Déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$. [0,5pt]

II. 1. Soit $a, b \in \mathbb{N}$ et $p = PGCD(a + b, ab)$, p premier.
   a) Démontrer que p divise a^2 et en déduire que p divise a. [0,5pt]
   b) En déduire que $PGCD(a, b) = p$. [0,5pt]
2. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système $\begin{cases} PGCD(a+b, ab) = 5 \\ PPCM(a, b) = 170 \\ a \leq b \end{cases}$ [1pt]

III. On considère l'équation $(E) : 113x - 35y = 2$

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de (E) [0,5pt]
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E). [0,5pt]
3. En déduire dans $\mathbb{Z}$ les solutions du système: $\begin{cases} x \equiv 3[35], & ; \\ x \equiv 1[113], & . \end{cases}$ [0,5pt]

Problème: ***09 points***

Les parties $I.$ et $II.$ sont indépendantes.

I/ Le but de cet exercice est d'encadrer le nombre $\sqrt{101}$ par deux fractions très proches l'une de l'autre. Pour ce faire, on considère la fonction g par $g(t) = \sqrt{t}$, puis on admet qu'elle est dérivable sur $]0 \ ; +\infty[$.

1. Montrer que pour tout $t \in [100 \ ; 101]$, on a : $\dfrac{1}{2\sqrt{101}} \leq g'(t) \leq \dfrac{1}{20}$. (0,5pt)
2. (a) En déduire que $10 + \dfrac{1}{2\sqrt{101}} \leq \sqrt{101} \leq 10 + \dfrac{1}{20}$ (0,75pt)

   (b) Et conclure que $\dfrac{1015}{101} \leq \sqrt{101} \leq \dfrac{201}{20}$. (0,75pt)

II/ Soit la fonction définie par: $f(x) = \dfrac{4\sin^2 x - 3\sin x}{\sin x - 1}$, et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthogonale. <u>*Unités graphiques:*</u> *4 cm pour π en abscisse, et 1 cm par unité en ordonnée*

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f. (0,5pt)
2. Démontrer que les droites d'équations $x = \dfrac{\pi}{2}$ et $x = \dfrac{3\pi}{2}$ sont axes de symétries à $(\mathcal{C})$. (0,5pt)
3. Etudier la péridicité de f. (0,25pt)
   Dans toute la suite, pour des raisons de symétrie, on choisit pour domaine d'étude $D = \left[0 \ ; \dfrac{\pi}{2}\right[\bigcup \left]\dfrac{\pi}{2} \ ; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.
4. Montrer que pour tout $x \in D$, $f'(x) = \dfrac{\cos x(4\sin^2 x - 8\sin x + 3)}{(\sin x - 1)^2}$. (0,75pt)
5. Dresser le tableau de variations de f. (1,5pt)
6. Préciser éventuellement les extrema relatifs de f sur le domaine d'étude D. (0,75pt)
7. Construire la courbe $(\mathcal{C})$ sur $\left[-2\pi \ ; 2\pi\right] \setminus \left\{-\dfrac{3\pi}{2} \ ; \dfrac{\pi}{2}\right\}$. (1,75pt)
8. Soit h la restriction de f sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{6} \ ; \dfrac{\pi}{2}\right[$. Montrer que h est une bijection de $\left[\dfrac{\pi}{6} \ ; \dfrac{\pi}{2}\right[$ vers un intervalle J à préciser, puis construire dans le même repère la courbe $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$ de sa réciproque. (1pt)

≪ *Le trouble est collectif mais la réussite est individuelle* ≫

" Bon courage à tous ! "

Examinateurs: *Mr. Kenmogne Marcelin feat Mr. Hyéfouais Achille S.*