MINESEC
DRES LITTORAL
DDES MOUNGO
BASSIN PEDAGOGIQUE Mbanga/Mombo
www.easy-maths.org

NIVEAU : Tle C
DUREE : 04 Hrs
COEF : 05
Année académique : 2013/2014

EVALUATION HARMONISEE DE LA 4^{eme} SEQUENCE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice 1: ***5 points***

Les parties I et II sont indépendantes.

I/

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 13x - 84y = 7$. (1pt)
   (b) Montrer que pour tout couple $(a; b)$ de solution de (E) on a: $\text{pgcd}(a; b) = 1$ ou $\text{pgcd}(a; b) = 7$. (0,5pt)
2. Déterminer les solutions $(a; b)$ de (E) telles que a et b soient premiers entre-eux. (0,5pt)
3. Déterminer les solutions $(a; b)$ de (E) telles que: $\text{pgcd}(a; b) = 7$. (0,5pt)

II/ L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$. On donne les points $A(3; 1; 0)$; $B(-1; 1; 0)$; $C(-1; 2; -1)$ et $D(1; 0; -2)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$; puis en déduire une équation cartésienne du plan (P) contenant les points A; B et C. (0,75pt)
2. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$. (0,5pt)
3. (a) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de D sur le plan (P). (0,5pt)
   (b) Soit $(\mathcal{S})$ la sphère de centre D et passant par A. Déterminer l'intersection du plan (P) et la sphère $(\mathcal{S})$. (0,75pt)

Exercice 2: ***4 points***

Dans le plan orienté, on considère le triangle équilatéral ACB tel que: $(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On note D le symétrique de B par rapport à la droite (AC); et r la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme A en C et B en E. Faire une figure et la completer au fur et à mesure.

1. (a) Quelle est a nature précise du quadrilatère $ABCD$. (0,5pt)
   (b) Déterminer le centre de la rotation r. (0,5pt)
   (c) Démontrer que les points A, C et E sont alignés; puis en déduire que C est le milieu du segment $[AE]$. (0,5pt)
2. A tout point M de $[AB]$ distinct de A et de B, on associe le point M' de $[CE]$ tel que $AM = CM'$. Démontrer que le triangle DMM' est équilatéral. (0,5pt)
3. Soit G l'isobarycentre du triangle DMM' et s la similitude directe plane de centre D qui transforme M en G.
   (a) Préciser le rapport et l'angle de s. (0,75pt)
   (b) Démontrer que $s(B) = C$. (0,5pt)
   (c) Construire le point A' image de A par s. (0,5pt)

(d) En déduire que les points C;G et A' sont alignés. (0,25pt)

Problème: ***11 points***

Le problème est formé de deux parties indépendantes: **A** et **B**.

Partie A On donne $h(x) = 2x - 4 + \ln x$, avec $x \in]0; \; ;+\infty[$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α dans l'intervalle $]1 \; ;2[$. (0,5pt)

2. On cherche une valeur approchée de α par la méthode du point fixe. Pour cela, on pose: $g(x) = 2 - \dfrac{1}{2}\ln x$, et $K = [1 \; ;2]$.

   (a) Montrer que $g(\alpha) = \alpha$, et que pour tout $x \in K$, $g(x) \in K$. (0,5pt)

   (b) Montrer que pour tout $x \in K$, $|g'(x)| < \frac{1}{2}$, et que $|g(x) - \alpha| < \frac{1}{2}|x - \alpha|$. (1pt)

3. On défnit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par: $u_0 = 2$, et $u_{n+1} = g(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Montrer que $u_n \in K$, et que $|u_{n+1} - \alpha| < \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$. (0,75pt)

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| < (\frac{1}{2})^n$. (0,5pt)

   (c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et p réciser sa limite. (0,25pt)

   (d) Déterminer l'entier n_0 tel que pour tout $n > n_0$, $|u_n - \alpha| < 10^{-3}$. (0,5pt)

Partie B

Soit $m \in \mathbb{R}^*$, on definit la fonction f_m par $f_m(x) = \begin{cases} x\ln|x| - (x-m)\ln|x-m| & x \in \mathbb{R}^*, x \neq m \\ f_m(0) = f_m(m) = m\ln|m| \end{cases}$

On suppose que $m > 0$ et on pose $I = [\frac{m}{2} \; ;+\infty[$.

1. Etudier la continuité de f_m en 0 eten m. (0,5pt)

2. (a) Montrer que $\frac{f_m(x) - f_m(0)}{x} = -\ln|1 - \frac{m}{x}| + \frac{m}{x}\ln|\frac{x}{m} - 1|$. (0,5pt)

   (b) En déduire que f_m n'est pas dérivable en 0. (rappel:$\frac{\ln(1+h)}{h} \to 1$, *si* $h \to 0$). (0,5pt)

   (c) Montrer que la droite (δ) d'équation $x = \frac{m}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe $(\mathcal{C}_m)$ de la fonction f_m. (0,25pt)

   (d) En déduire la dérivabilité f_m en m. (0,25pt)

3. (a) Montrer que la dérivée de f_m est définie par : $f'_m(x) = \ln|\frac{x}{x-m}|$ pour tout $x \in I^* \setminus \{m\}$; puis montrer que f_m est monotone sur I. (0,5pt)

   (b) Calculer la limite de f_m en $+\infty$ et y préciser la branche infinie. (0,75pt)

   (c) Construire le tableau de variations de f_m sur I, puis sur $\mathbb{R}_+$. $(m > 0)$ (0,75pt)

4. (a) Montrer que les courbes $(\mathcal{C}_{-m})$ et $(\mathcal{C}_m)$ sont symétriques et preciser l'élément de symétrie. (0,25pt)

   (b) Construire dans le même repère les courbes $(\mathcal{C}_{1/2})$ sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire $(\mathcal{C}_{-1/2})$. (1pt)

5. Recherche du nombre de zéros de la fonction f_m.

   (a) Montrer que si $m > 2$, f_m ne s'annule pas. (0,25pt)

   (b) Montrer que si $0 < m < 2$, il existe un $a_m \in]-\infty; \; -\frac{m}{2}]$ et un $b_m \in [\frac{m}{2} \; ;;+\infty[$ tels que $f_m(a_m) = f_m(b_m) = 0$; et que $a_m + b_m = m$. (0,75pt)

   (c) Montrer que $m < b_m < 1$ si $0 < m < 1$. (0,25pt)

" Bon courage à tous ! "