MINESEC
DRES LITTORAL
DDES MOUNGO
Lycée Bilingue de Mbanga
www.easy-maths.org

BACCALAUREAT BLANC Série C
DUREE : 04 Hrs
COEF : 05
Année académique : 2013/2014

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

L'épreuve comporte trois exercices indépendants et un problème tous obligatoires. Soyez précis et concis dans la redaction.

Exercice 1/ ***02,5 points***

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On donne les points A, B et C d'affixes respectives $a = 3+5i$, $b = -4+2i$ et $c = 1+4i$. Soit f la transformation du plan dans lui même qui à tout M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = (2-2i)z+1$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f. 0,5pt
2. On pose $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$.
   a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y. 0,25pt
   b) Montrer que les droites (CM') et (CA) sont perpendiculaires si et seulement si $x+3y = 2$. 0,75pt
3. a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : x+3y = 2$. 0,5pt
   b) En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle [-5; 5] et tels que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ soient orthogonaux. 0,5pt

Exercice 2/ ***3,25 points***

1. Donner la forme exponentielle du complexe $-1+i$, puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$. (On donnera les solutions sous forme algébrique) 1,25pt
2. On désigne par A, B et C les images des solutions de (E) dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, (D) la droite d'équation $x = 3$ et (Γ) l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x, y) tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 12 + \frac{3}{4}(x-3)^2$.
   a) Réduire l'écriture $MA^2 + MB^2 + MC^2$. 0,5pt
   b) En calculant la distance du point M à la droite (D), déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ). 1pt
   c) Construire (Γ). 0,5pt

Exercice 3/ ***04,25 points***

I. Soit $OABCDEFG$ un cube d'arête 4cm. On considère le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, où $\overrightarrow{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{j} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{k} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OD}$. On considère les points L et K définis par $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DG}$ et $\overrightarrow{EK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$.

1. Déterminer les coordonnées des points L et K. 0,5pt
2. Déterminer l'aire du triangle OLK. 0,5pt
3. a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par D et orthogonale au plan (OLK). 0,5pt
   b) Déterminer l'expression analytique du démi-tour d'axe (Δ). 0,75pt

II. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ associe le vecteur $\overrightarrow{u}'(x', y', z')$ tel que $\begin{cases} x' = -x + 2z \\ y' = y + 2z \\ z' = 2x + 2y \end{cases}$.

1. Démontrer que le noyau de f est une droite vectorielle E_1 de E dont on déterminera une base $(\overrightarrow{e_1})$. 0,5pt
2. Démontrer que l'image de f est un plan vectoriel E_2 de E dont on déterminera une base $(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. 0,75pt
3. a) Montrer que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base de E. 0,5pt
   b) Que peut-on dire des sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 ? 0,25pt

Problème: ***10 points***

Le problème est formé de deux parties liées: ***A*** *et* ***B****, et une partie independante* ***C****.*

Partie A *Equations différentielles*

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 3y = \dfrac{-3e}{(1+e^{-3x})^2}$. On donne une fonction ϕ dérivable sur $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-3x}\phi(x)$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , exprimer $\phi'(x) - 3\phi(x)$ en fonction de $f'(x)$. (0,5pt)
2. Déterminer f de sorte que ϕ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\phi(0) = \frac{e}{2}$. (1pt)

Partie B *Fonctions numériques et Intégrales*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^{1-3x}}{1+e^{-3x}}$. On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis étudier les variations de f. (1,5pt)
2. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$. Montrer que le point $A(0;\ \frac{e}{2})$ en est un centre de symétrie. (1,25pt)
3. Pour α réel non nul, on pose : $I(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)dx$.
   (a) Donner le signe et une interpretation graphique de $I(\alpha)$, en fonction de α. (0,5pt)
   (b) Exprimer $I(\alpha)$ en cm^2 en fonction de α. (0,5pt)
   (c) Déterminer la limite de $I(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$. (0,5pt)

Partie C *Convergence d'une somme*

Le but de cette partie est de déterminer la limite de la somme $S_n = 1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + ... + \dfrac{2^n}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pour cela, on définit pour tout entier n ≥ 1 l'intégrale $I_n = \int_0^2 \dfrac{1}{n!}(2-x)^n e^x dx$.

1. Calculer I_1. (0,75pt)
2. (a) Etablir que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a: $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!}(e^2 - 1)$. (0,5pt)
   (b) En déduire la limite de la suite (I_n). On admettra que $\frac{2^n}{n!}$ converge vers 0. (0,5pt)
3. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montre que $\forall\ n \geq 1,\quad I_n - I_{n-1} = -\frac{2^n}{n!}$. (1pt)
   (b) En déduire après conjecture, que la somme $I_n + S_n$ ne dépend pas de n. (1pt)
   (c) Calculer ensuite la limite de la suite (S_n). (0,5pt)

<u>Examinateurs :</u> Kenmogne Noumo et Hyéfouais Ngniodem