Épreuve de Mathématiques

Enseignants : **Nono Leopold& Negno Michel**

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Toute affirmation sans preuve pourra être rejetée sans preuve.

EXERCICE 1 **3 points**

1. Danc chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f sur l'intervalle I.

a. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin\frac{x}{2} - 5\cos 4x \end{array}, \quad I = \mathbb{R}$ [0,5pt]

b. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos x \sin^5 x \end{array}, \quad I = \mathbb{R},$ [0,5pt]

c. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & sx(5-x^2)^4, \end{array}, \quad I = \mathbb{R}.$ [0,5pt]

2. Soit f la fonction définie sur $I = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$.

a. Montrer que f est dérivable sur I et calculer $f'(x)$. [1pt]

b. En déduire les primitives de $g : x \mapsto \dfrac{1}{\cos^4 x}$ sur I. [0,5pt]

EXERCICE 2 **3 points**

Soit p et q deux entiers relatifs premiers entre eux, n un entier naturel non nul.

1. Démontrer que $pgcd(p, q^n) = 1$. [1pt]

2. Soit $P(x) = a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0$ un polynôme à coefficients entiers relatifs admettant une racine rationnelle $\dfrac{p}{q}$ (p et q sont des entiers relatifs premiers entre eux).

a. Démontrer que p divise a_0. [0,5pt]

b. Démontrer que q divise a_n. [0,5pt]

3. Factoriser le polynôme $3x^3 + 7x^2 + 7x + 4$. [1pt]

EXERCICE 3 **5 points**

1. Soit z et z' deux nombres complexes. Démontrer que : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. [0,5pt]

2. Soit α un réel appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. On considère l'équation d'inconnue complexe z :

$$(E) : \quad (1+iz)^3(1 - i\tan\alpha) = (1-iz)^3(1 + i\tan\alpha).$$

a. Soit z une solution de (E). Montrer que $|1 + iz| = |1 - iz|$. [0,25pt]

b. En déduire que z est réel. [0,5pt]

3. **a.** Exprimer $\dfrac{1 + i\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$. [0,25pt]

b. Soit z un réel. On pose $z = \tan\theta$, $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que (E) équivaut à une équation d'inconnue θ et le résoudre. [1pt]

c. Déterminer les solutions z_1, z_2, z_3 de (E). [0,75pt]

4. Soit (z_n) la suite définie par : $z_0 = 1 + i$ et $z_{n+1} = -\dfrac{1}{2} z_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

a. Démontrer que $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. [0,75pt]

b. Exprimer $arg(z_n)$ en fonction de n. [0,5pt]

c. Exprimer z_n en fonction de n. [0,5pt]

PROBLEME **9 points**

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

Partie A : *Etude d'une fonction auxiliaire.*

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{2}{x^2+1}$.

1. **a.** Calculer la dérivée g' de $g$et montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$. [0,5pt]

   b. Edutier le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x. [0,5pt]

2. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$. [0,5pt]

3. **a.** Dresser le tableau de variation de g. [0,5pt]

   b. En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0,5;0,6$ tel que $g(\alpha) = 0$. [0,5pt]

   c. En déduire le signe de $g(x)$ dans $]0;+\infty[$. [0,5pt]

Partie B : *Etude de f*

1. Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a : $f'(x) = g(x)$. En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$. [1pt]

2. **a.** Calculer la limite de $xf(x)$ quand x tend vers 0 à droite . [0,5pt]

   b. En déduire celle de $f(x)$ en $+\infty$. [0,5pt]

3. Etude de f en 0

   a. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) = x\ln(x^2+1) - 2x\ln x$. [0,5pt]

   b. En déduire la limite de f à droite de 0. Que peut-on conclure ? [0,5pt]

   c. Etudier la dérivabilité de f en 0. Préciser la tangente à (C) en 0. [0,5pt]

4. Encadrement de $f(\alpha)$.

   a. Montrer que pour tout $x \in [0,5;\alpha]$, $0 \leq f'(x) \leq f'(0,5)$. [0,5pt]

   b. En déduire que pour tout $x \in [0,5;\alpha]$, $0 \leq f(\alpha) - f(0,5) \leq (\alpha - 0,5)f'(0,5)$, puis que $0 \leq f(\alpha) - f(0,5) \leq \dfrac{1}{10}f'(0,5)$. [0,5pt]

   c. Calculer $f'(0,5)$; puis en déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-3} près. [0,5pt]

5. Dresser le tableau de variation de f. [0,5pt]
   Donner l'allure de la courbe (C) de f. [0,5pt]