Republique du Cameroun
Paix-Travail-Patrie
Ministère de l'Enseignement Supérieur
Université de Douala
Faculté de Génie Industrielle

Republic of Cameroon
Peace-Work-fatherland
Ministry Of Higher Education
University Of Douala
Faculty Of Industrial Engineering

Année Académique 2015-2016
Academic Year 2015-2016

CONCOURS D'ENTREE EN 1ere ANNEE, SESSION DE SEPTEMPBRE 2015
FIRST YEAR ENTRANCE EXAMINATION, SEPTEMBER SESSION 2015

EPREUVE DE (PAPER OF) : MATHEMATIQUES (METHEMATICS) BAC : CDE et GCE A-LEVEL
Durée (Time) : 3 heures (hours)

Calculatrice non programmable autorisée. Encadrer tous les résultats.

Exercice 1. (5points)

Dans cet exercice n désigne un entier naturel non nul. Pour tout n, on pose $I_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_1^e (\ln t)^n dt$.

1. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_1 = -1$.
   (b) Montrer que, pour tout n, on a $I_{n+1} = I_n + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}e$.
   (c) Montrer que, pour tout n, on a : $I_n = e\left(\dfrac{1}{0!} - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} - \cdots + \dfrac{(-1)^n}{n!}\right) - 1$.
2. (a) Démontrer que : $0 \le \displaystyle\int_1^e (\ln t)^n dt \le e - 1$.
   (b) En déduire que $|I_n| \le \dfrac{e-1}{n!}$.
   (c) Que peut-on dire pour la suite (I_n) ?
3. Pour tout entier n, on pose : $S_n = \dfrac{1}{0!} - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} - \cdots + \dfrac{(-1)^n}{n!}$. Déduire des questions précédentes la limite de la suite (S_n).

Exercice 2. (5points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\ \vec{u},\ \vec{v})$. On prendra 1cm pour unité graphique. On considère l'application f du plan dan lui même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = -(\sqrt{3}+i)z - 1 + i(1+\sqrt{3})$.

1. Montrer que f est une similitude directe dont le centre Ω a pour affixe i. Déterminer le rapport et l'angle de f.
2. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3}{4}i$. Calculer ΩM_0 et donner une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M_0}})$.
3. On considère la suite des points $(M_n)_{n\ge 0}$ définie pour tout entier naturel n par $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.

(a) Placer les points Ω, M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.

(b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, l'égalité : $z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)$.

(c) Pour tout entier naturel n, calculer ΩM_n puis déterminer le plus petit entier n tel que $\Omega M_m \geq 10^2$.

4. (a) On considère l'équation (E) : $7x - 12y = 1$ où x et y sont deux entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple $(-5, -3)$ est solution, rédoudre l'équation (E).

   (b) Soit Δ l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que $Im(z) = 1$ et $Re(z) \geq 0$. Caractériser géométriquement Δ et le représenter.

   (c) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi droite d'origine Ω et dirigée par $\vec{u}$. Préciser son plus petit élément.

Exercice 3. (6 points)

On se propose dans cet exercice de résoidre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$(E) : \quad x^2 + (1 - e^2)e^x x - e^{2+2x} = 0.$$

1. (a) Mettre e^{2x} en facteur dans le membre de gauche de l'équation (E).

   (b) Déterminer l'expression de X en fonction de x pour que l'équation (E) soit équivalente à l'équation (E') suivante : $(E') : \quad X^2 + (1 - e^2)X - e^2 = 0$.

2. (a) Déterminer le réel b pour que l'on ait : $(1 - e^2)^2 + 4e^2 = (1 + b)^2$.

   (b) Déterminer alors les deux solutions réelles X_1 et X_2 de l'équation (E').

3. En déduire que x est solution de (E) si et seulement si, x vérifie une des équations : $x = -e^{g(x)}$ où $x = e^{h(x)}$ où g et h sont des fonctions que l'on déterminera. Justifier la réponse.

4. On considère dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la courbe (C_1) d'équation $y = e^x$.

   (a) Par quelle transformation géométrique simple la courbe (C_2) d'équation $y = -e^x$ se déduit-elle de C_1 ?

   (b) Par quelle transformation géométrique simple la courbe (C_3) d'équation $y = e^{2+x}$ se déduit-elle de C_1 ?

   (c) Tracer l'allure des courbes (C_2) et (C_3) et la droite d'équation $y = x$.

5. Déterminer graphiquement, à l'aide de la question **4. (c)**, le nombre de solutions de l'équation (E). Justifier la réponse.

Exercice 4. (4points)

Une machine outil fabrique des cylindre. On mesure l'écart, en dixième de millimètre, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine. On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1,5$. Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté. Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80% des cas. Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

1. On prélève au hasard un cylindre dans la production.

   (a) Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est égale à $0,915$ à 10^{-3} près.

   (b) Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?

2. On prélève de manière indépendante dix cylindre de la production. On suppose le nombre de cylindres siffisamment important pour assimiler ce tirage à un tirage successif avec remise.

   (a) Quelle est la probabilité que les dix cylindres soient accpetés ?

   (b) Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé ?