Épreuve de Mathématiques

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE 1 **5 points**

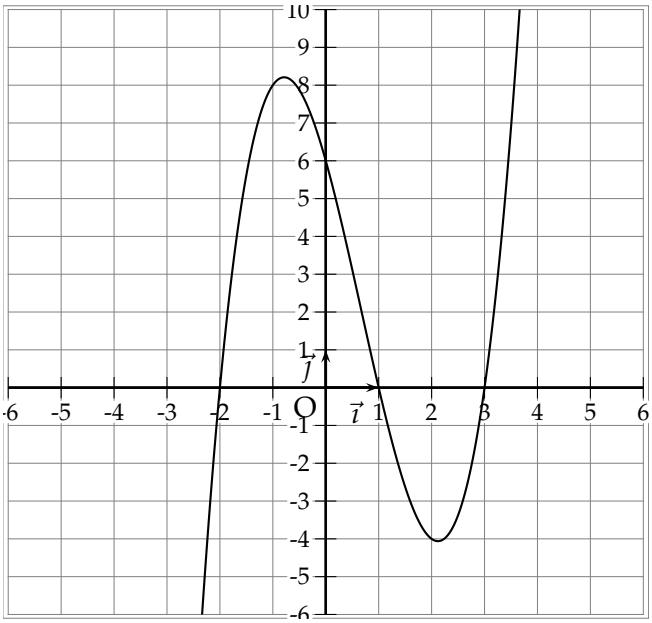
On considère le polynôme P défini par $P(x) = a\,x^3 - 6\,x^2 - 12\,x + 16$.

1. Calculer $P(1)$. [0,5pt]
2. Déterminer a pour que $P(1) = 0$. [0,5pt]
3. On donne le polynôme $Q(x) = 2\,x^3 - 6\,x^2 - 12\,x + 16$.
   a. Déduire de ce qui précède une racine évidente de Q. [0,5pt]
   b. En faisant une division euclidienne de $Q(x)$ par $x - 1$, déterminer les réels α, β et γ tels que $Q(x) = (x-1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$. [0,5pt]
   c. Vérifier vos résultats en procédant par identification. [0,5pt]
4. On considère maintenant le polynôme $R(x) = 2\,x^2 - 4\,x - 16$.
   a. Déterminer par deux méthodes différentes la forme canonique de $R(x)$. [1pt]
   b. En déduire que $R(x)$ est factorisable et factoriser $R(x)$. [0,5pt]
5. Déduire de tout ce qui précède la factorisation complète de $Q(x)$. [0,5pt]
6. Résoudre alors l'équation $Q(x) = 0$. [0,5pt]

EXERCICE 2 **5 points**

Sur la figure ci-dessous, $(\mathcal{C}_f)$ représente la courbe d'une fonction f dans un repère orthonormé (O, I, J).

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de cette fonction. [0,5pt]
2. Déterminer graphiquement les images de $-1\,;0\,;2\,;$ et $3,5$ par f. [1pt]
3. Déterminer graphiquement les antécédants de 0 et de 3 par f. [1pt]
4. Déterminer l'image directe de $[-2;-1]$. [0,5pt]
5. Déterminer l'image réciproque de $[-2;0]$. [1pt]
6. Dresser la tableau de variation de f. [0,5pt]
7. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq 3$. [0,5pt]



EASY-MATHS PARTNERSHIP

EXERCICE 3 **5 points**

1. Recopier et compléter les expressions suivantes : [0.25 × 8=2pts]

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \sin\ldots \qquad \cos(\pi+x) = \ldots$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin\ldots \qquad \cos(\pi-x) = \ldots$$
$$\sin(\pi+x) = \ldots \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos\ldots$$
$$\sin(\pi-x) = \ldots \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos\ldots$$

2. En utilisant l'une ou l'autre des relations ci-dessus, démontrer que [1pt]

$$\cos\frac{\pi}{10}+\cos\frac{9\pi}{10}+\cos\frac{6\pi}{10}+\cos\frac{4\pi}{10}=0.$$

3. x étant la mesure principale d'un angle, démontrer que $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x$. [1pt]

4. x étant la mesure principale d'un angle, démontrer que $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. [1pt]

EXERCICE 4 **5 points**

1. Soit $ABCD$ un carré, I le milieu de $[BC]$ et J le point tel que : $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$.

a. Faire un dessin. [0.5pt]

b. Déterminer les coordonnées des points A, C, I et J dans le repère orthonormal $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$. [0.5pt]

c. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IJ}$. [0.5pt]

d. Démontrer que $(IA)\perp(IJ)$. [0.5pt]

2. Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2}; \quad \|\vec{v}\| = 5 \quad \text{et} \quad \vec{u}.\vec{v} = 7.$$

On pose $\vec{\imath} = 4\vec{u} - \vec{v}$ et $\vec{\jmath} = -3\vec{u} + \vec{v}$.

a. Calculer $\vec{\imath}.\vec{\imath}$ et en déduire $\|\vec{\imath}\|$. Calculer $\|\vec{\jmath}\|$. [1pt]

b. Calculer $\vec{\imath}.\vec{\jmath}$. [0.5pt]

c. Quelle est la nature de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$? [0.5pt]

3. ABC est un triangle.

a. Rappeler la formule de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, puis rappeler la formule d'Al-Kashi. [0.5pt]

b. Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AC^2 + AB^2 - BC^2)$. [0.5pt]

c. On donne $AB = 4cm$; $BC = 5cm$ et $AC = 2cm$. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. [0.5pt]

EASY-MATHS PARTNERSHIP