Épreuve de Mathématiques

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE 1 — 5 points

1. Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 6x - 3$.

a. Ecrire f sous la forme canonique. [1pt]

b. a et b étant deux réels distincts, calculer le taux de variation de f entre a et b et en déduire le sens de variation de f sur $]-\infty;3]$ puis sur $[3;+\infty[$ et dresser son tableau de variation. [2pts]

2. On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 + x^2 - 17x + 14$.

a. Calculer $P(2)$. [0.5pt]

b. Faire la division euclidienne de $P(x)$ par $x - 2$. [0.5pt]

c. En déduire une factorisation complète de $P(x)$. [0.5pt]

d. Résoudre l'inéquation $P(x) \leq 0$. (*On utilisera un tableau de signe*). [0.5pt]

3. Résoudre les systèmes d'équations suivants (on utilisera la méthode par le déterminant)

a. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -x + 3y = 1 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} \dfrac{2}{a^2-1} + \dfrac{1}{b+1} = 5 \\ -\dfrac{1}{a^2-1} + \dfrac{3}{b+1} = 1 \end{cases}$

EXERCICE 2 — 5 points

On a relevé le poids en kg de 40 personnes et on a obtenu les résultats suivants.

Poids (x_i)	59	62	65	68	71	74	77
Effectif (n_i)	2	5	8	9	6	6	4

1. Quel est le mode de cette série statistique ? [1pt]

2. Calculer la moyenne $\bar{x}$. [1pt]

3. Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants et des effectifs cumulés décroissants puis déterminer une médiane. [1pt]

4. Calculer l'écart moyen e_m. [1pt]

5. Déterminer la variance V et déduire l'écart type σ de la série. [1pt]

EXERCICE 3 — 5 points

Soit ABC un triangle. On note I et J les milieux respectifs des côtés $[BC]$ et $[AC]$. On pose $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$.

1. Montrer le théorème d'Al-Kashi $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$. [0.5pt]

2. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ en fonction de b, c et $\cos\widehat{A}$. [0.5pt]

En déduire que $\cos\widehat{A} = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{bc}$. [0.5pt]

3. Déduire des deux premières questions que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left[b^2 + c^2 - a^2\right]$. [0.5pt]

4. En utilisant un raisonnement analogue, montrer que $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{2}\left[c^2 + a^2 - b^2\right]$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \dfrac{1}{2}\left[a^2 + b^2 - c^2\right]$. [1pt]

EASY-MATHS PARTNERSHIP

5. Montrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ et exprimer $\overrightarrow{BJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$. [1pt]

6. Montrer que $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$. [0.5pt]

7. Montrer que $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{8}(a^2 + b^2 - 5c^2)$. [1pt]

8. Déduire que $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{BJ} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5c^2$. [0.5pt]

EXERCICE 4 **5 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On considère les points $B\binom{5}{1}$ et $C\binom{-1}{-3}$.

1. **a.** Trouver une équation cartésienne du cercle $(\mathcal{C}_0)$ de diamètre $[BC]$. [1pt]

b. Préciser les coordonnées du centre de ce cercle ainsi que son rayon. [0.5pt]

2. On considère la cercle $(\mathcal{C})$ d'équation $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$, le point $A\binom{1}{0}$ et le vecteur $\vec{u}\binom{-1}{1}$.

a. Ecrire une équation paramétrique de la droite $(\mathcal{D})$ passant par A et dirigée par $\vec{u}$. [0.5pt]

b. Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$. [1pt]

3. Soit $(\mathcal{D}')$ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 4t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

a. $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont elles parallèles ? [0.5pt]

b. Trouver les coordonnées de leur point d'intersection si possible. [1pt]

c. Les points $E\binom{0}{-2}$ et $F\binom{5}{-3}$ appartiennent t-ils à $(\mathcal{D}')$? [0.5pt]

d. Soit (Δ) la droite d'équation cartésienne : $3x - 4y - 5 = 0$. Justifier que $(\mathcal{D}')$ et (Δ) sont perpendiculaires. [1pt]

4. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des points $M\binom{x}{y}$ vérifiant $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$. [1pt]

EASY-MATHS PARTNERSHIP