MINESEC
INSTITUT VICTOR HUGO
Département de Mathématiques

Année scolaire : 2015-2016
Classe : T^{le} C **Durée : 3 heures**
Séquence 5 **Date : 15 Avril 2016**
Coefficient : 05

Épreuve de Mathématiques

Enseignant : **Romaric TCHAPNGA**

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE I : PROBABILITÉ - VARIABLES ALÉATOIRES **4 Points**

Une urne contient deux boules rouges et m boules noires (m entier naturel non nul), indiscernables au toucher et ayant chacune la même probabilité d'apparition.

1. On tire trois boules successivement avec remise, on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.
   - **a.** Donner la loi de probabilité de X. **1 pt**
   - **b.** Calculer $E(X)$ espérance mathématique, déterminer m pour que $E(X) = 1,2$. **1 pt**
2. Dans la suite de l'exercice on prend $m = 3$; on tire maintenant les 5 boules de l'urne successivement sans remise. On désigne par Y la variable aléatoire égale au rang de la 1 ère boule noire tirée.
   - **a.** Déterminer la loi de probabilité de Y. **1 pt**
   - **b.** Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y. **1 pt**

EXERCICE II : INTEGRALES - SUITES NUMERIQUES **5 Points**

On considère la suite (I_n) définie par pour tout entier naturel n : $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^x \, dx$

1.
   - **a.** Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n \, dx$ et montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$ on a : $\dfrac{1}{(n+1)!} \leq I_n \leq \dfrac{e}{(n+1)!}$. **1 pt**
   - **b.** Montrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite. **0,5 pt**
2.
   - **a.** Calculer I_0, puis I_1 à l'aide d'une intégration par parties. **1 pt**
   - **b.** Etablir, en intégrant par parties, que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $I_{n-1} - I_n = \dfrac{1}{n!}$. **0,75 pt**
3. On pose, pour tout entier $n \geq 1$: $J_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$
   - **a.** En utilisant les relations (1), exprimer J_n à l'aide de I_0 et I_n. **0,75 pt**
   - **b.** En déduire la limite J de la suite (J_n). **0,5 pt**
   - **c.** Justifier l'encadrement : $\dfrac{1}{(n+1)!} \leq J - J_n \leq \dfrac{e}{(n+1)!}$. **0,5 pt**

EXERCICE III : PROBABILITÉ - GÉOMÉTRIE DE L,ESPACE - SUITES NUMERIQUES **3 Points**

Une urne contient quatre jetons numérotés de 1 à 4. On tire au hasard un jeton de l'urne, on lit le numéro, noté a, porté sur le jeton puis on remet le jeton tiré dans l'urne. On tire ensuite un deuxième jeton de l'urne et on note b le numéro du jeton tiré. Soit $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$un repère orthonormal de l'espace, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs de coordonnées respectives $(a; -5; 1-a)$ et $(1+b; 1; b)$.

1. Montrer que la probabilite que ces vecteurs soient orthogonaux est égale a $\frac{1}{4}$. **0,75 pt**

2. On renouvele quatre fois l'experience precedente. On designe par X le nombre de realisation de l'évenement : "les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux" au cours des quatre épreuves.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X. **1 pt**

   b. Calcule l'espérance mathématique de X. **0,5pt**

3. Soit (U_n), la suite de terme general $U_n = \left(\frac{a+2}{b^2}\right)^n$. Calculer la probabilité que la suite (U_n) soit croissante. **0,75pt**

PROBLÈME : FONCTIONS NUMÉRIQUES - CALCUL INTEGRAL **8 points**

Le problème comporte trois parties dépendantes A, B et C.

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$. On appelle (C) la représentation graphique de f, dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$du plan (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A

1. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation. **0,75pt**

2. Tracer la représentation graphique (C) de f dans $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. **0,5 pt**

3. On pose pour $p \geqslant 1$, $I_p = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^p}{x^2}\,dx$.

   a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer : $I_1 = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$. **0,5 pt**

   b. Prouver, en effectuant une intégration par parties, que pour tout entier p supérieur ou égal à 1 : $I_{p+1} = -\frac{2^{p+1}}{e^2} + (p+1)I_p$. **0,5 pt**

   c. En utilisant les résultats précédents, calculer successivement I_2 et I_3. **0,5 pt**

4. Soit D le domaine du plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$. On fait tourner autour de l'axe des abscisses le domaine D et on obtient un solide de révolution (S).

   a. Calculer l'aire du domaine D en cm^2. **0,5 pt**

   b. Calculer en unités de volume, le volume du solide (S) ainsi engendré. **0,5 pt**

Partie B Soit a un réel strictement positif et A le point de (C) d'abscisse a et T_a la tangente à (C) au point A.

1. Écrire une équation de T_a. **0,25 pt**

2. Déterminer les réels a, pour lesquels T_a passe par l'origine O du repère. **0,5 pt**

3. Donner une équation de chacune des tangentes à (C), passant par O. **0,5 pt**
   Tracer ces tangentes sur la figure. **0,5 pt**

Partie C On étudie maintenant l'intersection de (C) avec la droite Δ d'équation $y = \frac{1}{e^2}x$.

1. On pose pour x strictement positif, $\varphi_1(x) = x - e\ln x$.
   Montrer que φ_1 est strictement croissante sur $]e, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0\,;\,e[$. **0,5 pt**

2. On pose pour x strictement positif, $\varphi_2(x) = x + e\ln x$.

   a. Étudier le sens de variation de φ_2 sur $]\ 0,\ +\infty[$. **0,5 pt**

   b. Montrer que l'équation $\varphi_2(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]0\ ;\ +\infty[$. **0,5 pt**

   c. Montrer que α appartient à $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ et donner un encadrement de α, d'amplitude 10^{-1}. **0,5 pt**

3. Déterminer les points d'intersection de (C) et de Δ. **0,5 pt**