MINESEC
INSTITUT VICTOR HUGO
Département de Mathématiques

Année scolaire : 2015-2016
Classe : T^{le} C **Durée : 3 heures**
Séquence III **Date : 16/12/ 2015**
Coefficient : 05

Épreuve de Mathématiques

Enseignant : **Romaric TCHAPNGA**

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE I **5 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\ I,\ J)$.
Soit f la fonction définie sur $]-3;1[$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \tan\left[\frac{\pi}{4}(x+1)\right]$.

1. **a.** Étudier la fonction f. **0,75 pt**

   b. Tracer la courbe représentative (C_f) de f. **0,75 pt**

2. **a.** Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} et préciser son sens de variation. **0,5 pt**

   b. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left[f^{-1}(x)\right]' = \dfrac{4}{\pi(1+x^2)}$. **1 pt**

3. On considère la fonction g, définie par : $g(x) = f^{-1}(x) + f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$.

   a. Étudier la dérivabilité de g sur son ensemble de définition puis calculer sa dérivée. **1 pt**

   b. En déduire la formule explicite de g sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$. **1 pt**

EXERCICE II **5,5 points**

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, unité graphique 4 cm, on considère les points A d'affixe $z_{\text{A}} = 1$ et B d'affixe $z_{\text{B}} = 2$. Soit un réel θ appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$. On note M le point d'affixe $z = 1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$.

1. Montrer que le point M appartient au cercle (C) de centre A et de rayon 1. **0,5 pt**

2. Exprimer l'angle $(\overrightarrow{\text{AB}}\ ;\ \overrightarrow{\text{A}M})$ en fonction de θ. **0,5 pt**
   En déduire l'ensemble E des points M quand θ décrit l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$. **0,5 pt**

3. On appelle M' l'image de M par la rotation de centre O et d'angle -2θ et on note z' l'affixe de M'. Montrer que $z' = \overline{z}$ puis que M' appartient à (C). **1 pt**

4. Dans toute la suite, on choisit $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. On appelle r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$ et A$'$ l'image de A par r.

   a. Définir l'image (C') du cercle (C) par r. **0,5 pt**
   Placer sur une figure A, B, (C), M, (C') puis le point M' image de M par r. **1 pt**

   b. Montrer que le triangle AMO est équilatéral. **0,5 pt**

   c. Montrer que (C) et (C') se coupent en O et en M'. **0,5 pt**

   d. Soit le point P symétrique de M par rapport à A.
   Montrer que M' est le milieu de $[\text{A}'P]$. **0,5pt**

PROBLEME **9,5 Points**

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : **4,5 Points**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les trois points $A(2;0;0)$, $B(1;1;0)$ et $C(3;2;6)$. (D) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\,(0\,;1\,;1)$ et (Δ) la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{v}\,(1\,;-2\,;2)$.

1. Écrire une représentation paramétrique de chacune des droites (D) et (Δ) puis montrer que (D) et (Δ) sont sécantes en un point dont on précisera les coordonnées. **0,75 pt**
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, puis écrire une équation cartésienne du plan (ABC). **0,75 pt**
3. Déterminer l'aire en unité d'aire du triangle ABC. **0,75 pt**
4. Soit H le projeté orthogonal du point $F(2\,;4\,;4)$ sur le plan (ABC).
   - **a.** Déterminer les coordonnées de H. **0,75 pt**
   - **b.** Calculer de deux manières différentes, le volume du tétraèdre FABC. **1 pt**
5. Déterminer l'ensemble $(\sum)$ des points M de l'espace tel que : $\left(\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{BM}\right) \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$. **0,5 pt**

Partie B : **5 points**

Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle $[1\,;46]$.

1. On considère l'équation (E) : $23x + 47y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.
   - **a.** Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{Z}^2$. **0,5pt**
   - **b.** En déduire qu'il existe un unique entier x appartenant à A tel que $23x \equiv 1 \quad (47)$. **0,5pt**
2. Soient a et b deux entiers relatifs.
   - **a.** Montrer que si $ab \equiv 0[47]$ alors $a \equiv 0[47]$ ou $b \equiv 0[47]$. **0,5pt**
   - **b.** En déduire que si $a^2 \equiv 1[47]$ alors $a \equiv 1[47]$ ou a $a \equiv -1[47]$. **0,5pt**
3.
   - **a.** Montrer que pour tout entier p de A, il existe un entier relatif q tel que $p \times q \equiv 1\ (47)$. **0,5pt**
     Pour la suite, on admet que pour tout entier p de A, il existe un unique entier, noté ***inv***(p)*, appartenant à A tel que* $p \times$ ***inv***$(p) \equiv 1[47]$.
   - **b.** Montrer que : $\text{inv}(1) = 1$; $\text{inv}(2) = 24$ et $\text{inv}(3) = 16$. **0,75pt**
   - **c.** Déterminer tous les entiers p de A qui vérifient $p = \text{inv}\,(p)$. **1 pt**
   - **d.** Montrer que $46! \equiv -1[47]$. **0,75pt**