Chapitre 2

Calculs vectoriels

2.1 Calculs barycentriques

2.1.1 Fonction vectorielle de Leibniz

Définition 2.1 (Point pondéré)**.** *On appelle point pondéré d'un espace affine $\mathcal{E}$ tout couple (A, α), $A \in \mathcal{E}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Définition 2.2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, A_2, \dots A_n$ n points de $\mathcal{E}$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.*
$\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$ est appelé système de points pondérés de $\mathcal{E}$. On note $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ est la masse du système.

Définition 2.3 (Fonction vectorielle de Leibniz)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système de points pondérés. On appelle fonction vectorielle de Leibniz associée à ce système l'application qui à tout point M de $\mathcal{E}$ associe le vecteur $\overrightarrow{V(M)}$ avec $\overrightarrow{V(M)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$.*

Exemple 2.1. *Soit $(A, 1)$, $(B, -1)$, $(C, -1)$ un système de point pondérés du plan. La fonction vectorielle de Leibniz associée à ce système est $M :\mapsto \overrightarrow{V(M)} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.*
Montrer que si I est le milieu de $[BC]$, $\overrightarrow{V(M)}$ est aussi associé à $\{(A, 1); (I; -2)\}$.

Remarque 2.1. *Soit M et M' deux point de $\mathcal{E}$, on a $\overrightarrow{V(M)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ et $\overrightarrow{V(M')} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i}$, ainsi :*

$$\overrightarrow{V(M)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A'}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MM'} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{V(M')}.$$

On en déduit la relation suivante entre les images de M et M' :

$$\overrightarrow{V(M)} - V(M') = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \overrightarrow{MM'} = m\overrightarrow{MM'}.$$

- *Remarquer que si $m = 0$, $\overrightarrow{V(M)} = \overrightarrow{V(M')}$ pour tout $M, M' \in \mathcal{E}$.*
- *Si $m \neq 0$, posons $M' = O$, alors on a $\overrightarrow{V(M)} = m\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{V(O)}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{m}(\overrightarrow{V(O)} - \overrightarrow{V(M)})$. Il apparait alors clairement que pour tout vecteur $\overrightarrow{V}$, l'équation $\overrightarrow{V(M)} = \overrightarrow{V}$ admet une solution unique définie par $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{m}(\overrightarrow{V(O)} - \overrightarrow{V})$. En particulier, si $\overrightarrow{V} = \vec{0}$, il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{V(G)} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}(\overrightarrow{V(O)})$.*

La fonction vectorielle de Leibniz a les propriétés suivantes.

Théorème 2.1. *Soit $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ un système de n points pondérés de l'espace de masse $m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.*

- *Si $m = 0$, alors le vecteur $\overrightarrow{V(M)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ est constant c'est-à-dire indépendant du point M.*
- *Si $m \neq 0$, alors il existe un unique point G de $\mathcal{E}$ vérifiant $\overrightarrow{V(G)} = \vec{0}$. De plus, pour tout point O de $\mathcal{E}$, on a*

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}.$$

Définition 2.4. *L'unique point G du théorème 2.1 est appelé barycentre du système $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$.*

Proposition 2.1. *L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. Soit $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ n points poindérés et G leur barycentre. On suppose que $A_i(x_i, y_i, z_i)$ et $G(x_G, y_G, z_G)$, alors on a*

$$x_G = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i, \quad y_G = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i, \quad z_G = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i z_i,$$

Exemple 2.2. *L'espace $\mathcal{E}$ est muni du repère $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. On considère les points $A(3, -4, 2)$, $B(1, 5, -2)$ et $C(-4, -1, 2)$.*

1. *Calculer les coordonnées du barycentre I de $(B, 2)$ et $(C, 3)$*
2. *Calculer les coordonnées du barycentre J de $(A, 5)$, $(B, 2)$ et $(C, 3)$.*
3. *Vérifier que J est le milieu de $[AI]$.*

Solution

1. $x_I = \frac{1}{2+3}(2x_B + 3x_C) = \frac{1}{5}(2\times 1 + 3\times(-4)) = -2$; $y_I = \frac{1}{2+3}(2y_B + 3y_C) = \frac{1}{5}(2\times 5 + 3\times(-1)) = \frac{7}{5}$; et $z_I = \frac{1}{2+3}(2z_B + 3z_C) = \frac{1}{5}(2\times(-2) + 3\times(2)) = \frac{2}{5}$. Ainsi $I(-2, \frac{7}{5}, \frac{2}{5})$.
2. On vérifie aisément que $J = (\frac{1}{2}; -\frac{13}{10}; \frac{12}{10})$.
3. Facile à vérifier.

Proposition 2.2.
- *On ne modifie pas le barycentre d'un système en multipliant la masse de chaque point par un même nombre non nul. De façon précise, les système $(A_i, k\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$, $k \neq 0$ et $(A_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ ont le même barycentre.*
- *On ne modifie pas le barycentre d'un système de points pondérés en remplaçant plusieurs d'entre eux par leur berycentre.*

Exercice 2.1 (d'application)**.** *5 page 50.*

2.1.2 Fonction scalaire de Leibniz

Définition 2.5. *Soit (A_i, α_i) un système de points pondérés. On appalle fonction scalaire de Leiniz associé au système l'application g de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$*

$$g : M \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \cdots + \alpha_n MA_n^2.$$

Rappel 2.1. *Il a été établi que dans un triangle AMB, avec I milieu de $[AB]$ que :*

1. $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$ *(théorème de la médiane)*
2. $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM}$.

Comparons les images par g de P et M, points quelconques de $\mathcal{E}$.

$$g(P) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i PA_i^2 \text{ et } g(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA_i})^2.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} g(M) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA_i})^2. \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MP^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{PA_i} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i PA_i^2 \\ &= g(P) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MP^2 + 2\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{V(P)} \end{aligned}$$

où $\overrightarrow{V}$ est la fonction vectorielle de Leibniz. Deux cas se présentent :

★ si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, alors $\overrightarrow{V}$ est une fonction constante ; pour $\overrightarrow{V}(P) = \overrightarrow{U}$, on a $g(M) = g(P) + 2\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{U}$.

★ si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, alors il existe G, point unique tel que $\overrightarrow{V(G)} = \vec{0}$, d'où $g(M) = g(G) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MG^2$.

Proposition 2.3. *Soit G le barycentre de $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ avec $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$. Alors :*

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\alpha+\beta+\gamma)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2.$$

Corollaire 2.1. *Soit G le barycentre de $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ avec $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$. Alors :*

$$g(G) = \frac{\beta\gamma BC^2 + \gamma\alpha CA^2 + \alpha\beta AB^2}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

L'exposé ci-dessous permet de démontrer par l'élève cette formule qui permet de déterminer quelques lieux géométriques.

Exposé 2. On considère l'application g du plan dans $\mathbb{R}$ qui à tout point M associe le réel $g(M)$ défini par

$$g(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2, \quad \alpha+\beta+\gamma \neq 0.$$

Soit G le barycentre des points massifs (A,α), (B,β) et (C,γ).

1. Démontrer que $g(M) = (\alpha+\beta+\gamma)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2$.
2. Déterminer $g(A)$, $g(B)$, et $g(C)$.
3. Montrer que $g(A) = (\alpha+\beta+\gamma)GA^2 + g(G)$, $g(B) = (\alpha+\beta+\gamma)GB^2 + g(G)$ et $g(C) = (\alpha+\beta+\gamma)GC^2 + g(G)$.
4. Démontrer que $\alpha g(A) + \beta g(B) + \gamma g(C) = 2(\alpha+\beta+\gamma)g(G)$.
5. Déduire que $g(G) = \frac{\beta\gamma BC^2+\gamma\alpha CA^2+\alpha\beta AB^2}{\alpha+\beta+\gamma}$.

6. (a) Construire le barycentre G des points pondérés $(A,-1)$, $(B,4)$ et $(C,1)$.
   (b) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $-MA^2+4MB^2+MC^2=\frac{a^2}{2}$. (On pourra appliquer le résultat de la question 2.(e).

Soit A, B, C, points alignés. L'on se propose de démontrer la relation de Stewart suivante :

$$\overline{BC}MA^2+\overline{CA}MB^2+\overline{AB}MC^2+\overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB}=0.$$

7. Justifier que $\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB}=0$.
8. On définit les fonctions scalaire et vectorielle d'ordre 3 de Leibniz suivantes

$$g(M)=\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2,\quad f(M)=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}.$$

Soit M et P deux points du plan, montrer que

$$g(M)=g(P)+\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{f(P)}+(\alpha+\beta+\gamma)MP^2.$$

9. En utilisant les questions (a) et (b), montrer que pour tout point M du plan $g(M)=g(A)+2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{V}$ avec $\overrightarrow{V}=\overline{CA}.\overrightarrow{AB}+\overline{AB}.\overrightarrow{AC}$.
10. Montrer que $\overrightarrow{V}=\vec{0}$ et déduire que pour tout point M du plan $g(M)=g(A)=\overline{CA}.AB^2+\overline{AB}.AC^2$.
11. Justifier que $g(M)=\overline{CA}.\overline{AB}.\overline{CB}$ et déduire la relation de Stewart.

Soit un triangle ABC et D le pied de la bissectrice intérieure issue de d'angle $\widehat{A}$. On pose $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$ et $AD=d$.

12. Faire une figure.
13. La parallèle à la droite (AD) passant par C rencontre (AB) en E. Placer le point E.
    (a) Justifier que $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AE}$
    (b) Montrer que $AE=AC$ puis déduire que $\frac{DB}{c}=\frac{DC}{b}=\frac{a}{b+c}$.
14. Appliquer la formule de Steawart sur les points (alignés) B,D,C en prenant $M=A$.
15. Déduire que $d^2=\frac{bc}{(b+c)^2}\left[(b+c)^2-a^2\right]$.
16. Déduire que $d=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\widehat{A}}{2}$. (On pourra utiliser la relation $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}[b^2+c^2-a^2]$ que l'on aura pris le soin de démontrer.)

Théorème 2.2. *Soit $(A_i,\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ un système de n points pondérés de masse $m=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i$.*

1. Si $m\neq 0$, alors pour tout réel k, l'ensemble de niveau k de l'application $g(M)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i MA_i^2$ est :

(a) dans le plan : soit le vide, soit le singleton $\{G\}$, soit un cercle de centre G.

(b) dans l'espace : soit vide, soit le point G, soit la sphère de centre G.

2. Si $m=0$, on pose $\overrightarrow{V}=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}$.

(a) si $\overrightarrow{V}=\vec{0}$, l'ensemble de niveau k de g est soit vide soit $\mathcal{E}$.

(b) si $\overrightarrow{V}\neq\vec{0}$, l'ensemble de niveau k de g est :
– dans le plan une droite orthogonale à $\overrightarrow{V}$,
– dans l'espace un plan orthogonal à $\overrightarrow{V}$.

Démonstration. D'après ce qui précède le théorème, on a dans le cas où $m \neq 0$
$g(M) = g(G) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MG^2$. La relation $g(M) = k$ conduit donc à $g(G) + mMG^2 = k$; on en déduit que $MG^2 = \frac{1}{m}(k - g(G)) = \lambda$.

- si $\lambda < 0$, alors l'ensemble cherché est vide
- si $\lambda = 0$, $M = G$ et l'ensemble cehrché est $\{G\}$
- si $\lambda > 0$, $MG = \sqrt{\lambda}$.
  - $M \in \mathcal{C}(G, \sqrt{\lambda})$ si $\mathcal{E}$ est le plan ;
  - $M \in \mathcal{S}(G, \sqrt{\lambda})$ si $\mathcal{E}$ est l'espace.

□

Exemple 2.3. *On donne dans un repère orthonormé* $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, *du plan les points* A *et* B *définis par* $\overrightarrow{OA} = 2\vec{\imath}$ *et* $\overrightarrow{OB} = \vec{\jmath}$. *Soit la fonction* $M \mapsto MA^2 - MB^2$. *Déterminer l'ensemble de niveau* 3 *de cette fonction.*

Solution La fonction $M \mapsto MA^2 - MB^2$ est associée au système $\{(A,1),(B,-1)\}$ de masse $m = 0$. L'ensemble cherché est donc une droite perpendiculaire au vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$. On cherche l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = 3$, mais le point O vérifie bien $OA^2 - OB^2 = 3$ donc O est un point de l'ensemble cherché. L'ensemble de niveau 3 de $M \mapsto MA^2 - MB^2$ est la perpendiculaire à (AB) passant par O.

Exercice 2.2. *Soit* $ABCD$ *un carré de centre* O *dont les côté ont pour longueur* 1. *On considère la fonction* $M :\mapsto MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$. *Déterminer l'ensemble de niveau* 4 *de cette fonction.*

Ensemble de niveau de la fonction $M \mapsto \frac{MA}{MB}$.

Soit $k \in \mathbb{R}$, A et B deux points distincts de $\mathcal{E}$, on a $\frac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow MA = kMB$. Il est clair que si $k < 0$, alors M n'existe pas. Si $k = 0$, alors $MA = 0$ donc $M = A$, si $k = 1$, alors $MA = MB$ donc M est sur la médiatrice de $[AB]$. Supposons maintenant $k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, alors

$$MA = kMB \Leftrightarrow MA^2 = k^2MB^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) = \vec{0}.$$

Posons $G_1 = bar\{(A,1),(B,k)\}$ et $G_2 = bar\{(A,1),(B,-k)\}$, G_1 et G_2 existent car $1+k$ et $1-k$ sont non nuls. Il vient alors

$$\frac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow (1-k)(1+k)\overrightarrow{MG_1}.\overrightarrow{MG_2} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG_1}.\overrightarrow{MG_2} = \vec{0}.$$

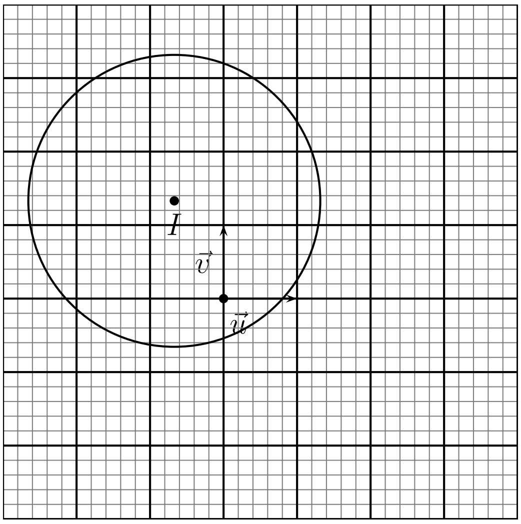
L'ensemble des points M vérifiant $\frac{MA}{MB} = k$ est alors soit un cercle soit une sphère de diamètre $[G_1G_2]$ suivant qu'on soit dans le plan ou dans l'espace. On en déduit la proposition suivante.

Proposition 2.4. *Soit* A *et* B *deux points de* $\mathcal{E}$. *On considère la fonction* $M \mapsto \frac{MA}{MB}$. *Soit* $k \in \mathbb{R}$, *on pose* $E_k = \{M \in \mathcal{E}/,\ \frac{MA}{MB} = k\}$.

1. *Si* $k < 0$, *alors* $E_k = \varnothing$.
2. *Si* $k = 0$, *alors* $E_k = \{A\}$.
3. *Si* $k = 1$, E_k *est la médiatrice de* $[AB]$.
4. *Si* $k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, *on pose* $G_1 = bar\{(A,1),(B,k)\}$ *et* $G_2 = bar\{(A,1),(B,-k)\}$. *Alors :*
   (a) E_k *est le cercle de diamètre* $[G_1G_2]$ *si on est dans le plan ;*
   (b) E_k *est la sphère de diamètre* $[G_1G_2]$ *si on est dans l'espace.*

Exemple 2.4. *Déterminer et construire l'ensemble E_2 des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = 2$ avec $A(2,0)$ et $B(0,1)$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.*

Solution $G_1 = bar\{(A,1),(B,2)\}$ et $G_2 = bar\{(A,1),(B,-2)\}$. Les coordonnées de G_1 et G_2 sont données par $G_1(\frac{2}{3};\frac{2}{3})$ et $G_2(-2,-2)$. Le centre du cercle est le point I milieu de $[G_1G_2]$ de coordonnées $I(-\frac{2}{3};\frac{4}{3})$.

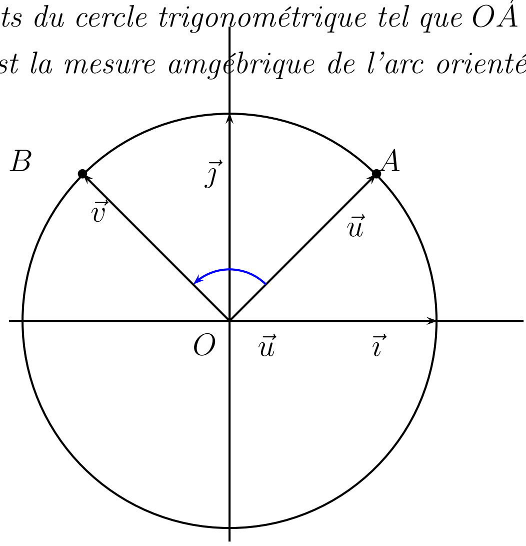


2.2 Orientation du plan et de l'espace. Produit vectoriel.

2.2.1 Rappels

Définition 2.6. *Le plan euclidien est dit orienté lorsque tous les cercles de ce plan ont été orientés positivement.*
Le cercle trigonométrique est tout cercle de rayon 1 positivement orienté.
Un vecteur $\vec{u}$ est dit unitaire si $\|\vec{u}\| = 1$.

Définition 2.7 (Angle de vecteurs unitaires)**.** *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires du plan euclidien orienté. A et B deux points du cercle trigonométrique tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. La mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est la mesure amgébrique de l'arc orienté $\widehat{AB}$ sur le cercle trigonométrique.*



Définition 2.8 (Angle de deux vecteurs quelconques)**.** *Soit $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs non nuls du plan euclidien orienté. On pose : $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{U}\|}\vec{U}$ et $\vec{v} = \frac{1}{\|\vec{V}\|}\vec{V}$. On a $(\vec{U}, \vec{V}) = (\vec{u}, \vec{v})$.*

Proposition 2.5. *1. Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$, alors $(k\vec{U}, k\vec{V}) = (\vec{U}, \vec{V})$.*

2. $(\widehat{\vec{U},\vec{V}}) + (\widehat{\vec{V},\vec{W}}) = (\widehat{\vec{U},\vec{W}})$ (Relation de Chales).

3. – Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens, alors $mes(\vec{u},\vec{v}) \equiv 0[2\pi]$
– Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contaire, alors $mes(\vec{u},\vec{v}) \equiv \pi[2\pi]$.

Corollaire 2.2. *Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si $mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 0[\pi]$.*

Théorème 2.3. *Soit A et B deux points distincts du plan, α un réel de l'intervalle $]-\pi;\pi]$. L'ensemble des points M du plan tels que $mes(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha$ est :*
- *la dtoite (AB) privée du segment $[AB]$ si $\alpha = 0$;*
- *le segment $[AB]$ privé des points A et B si $\alpha = \pi$;*
- *l'un des arcs de cercle d'extrémité A et B privés de A et B. Cercle dont le centre est le point O de la médiatrice de $[AB]$ tel que l'on ait $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \alpha$.*

2.2.2 Produit vectoriel

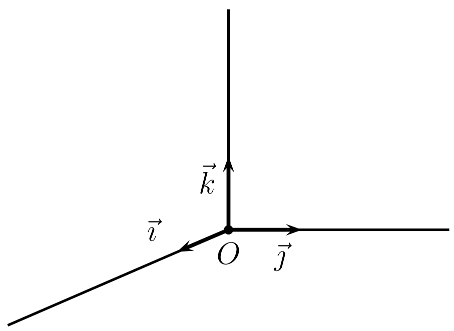
Repère orthonormé direct de l'espace

Soit $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace. On définit les points I, J, K de la façon suivante : $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$. On définit les demi-droites $[Ox)$, $[Oy)$ et $[Oz)$ d'origine O de vecteurs directeurs respectifs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.

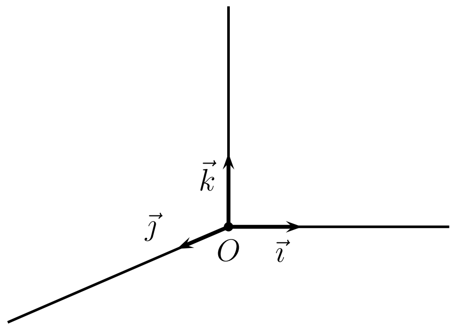
Règle du l'observateur d'Ampère

Plaçons un observateur d'Ampère sur la demi-droite $[Oz)$, les pieds en O, il regarde dans la direction de la droite (Ox). Deux cas sont possibles :

1. l'observateur voit $[Oy)$ à sa gauche



2. l'observateur voit $[Oy)$ à sa droite.



Définition 2.9. *On appelle repère orthonormé direct de l'espace tout repère orthonormé* $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ *tel qu'un observateur placé sur* $[Oz)$ *et regardant* $[Ox)$ *ait la demi-droite* $[Oy)$ *à sa gauche.*

Définition 2.10. *Un plan de l'espace est dit orienté losque les cercles de ce plan sont orientés dans le sens trigonométrique.*

Définition 2.11 (Produit vectoriel)**.** *Soit* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs de l'espace orienté. On appelle produit vectoriel de* $\vec{u}$ *par* $\vec{v}$ *le vecteur noté* $\vec{u} \wedge \vec{v}$ *et défini par*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{cases} 0 \text{ si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \\ \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin(\vec{u},\vec{v})\vec{k} \end{cases}$$

où $\vec{k}$ *est le vecteur normal unitaire au plan défini par* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$.

Proposition 2.6. *Soit* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs de l'espace orienté. Le vecteur* $\vec{u} \wedge \vec{v}$ *est orthogonal à chacun des vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$. *De façon précise, on a* $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}$ *et* $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$.

Remarque 2.2. *Si* $(\vec{u},\vec{v})$ *est une base orthonormée direct du plan* (O,A,B), *alors* $(\vec{u},\vec{v},\vec{u} \wedge \vec{v})$ *est une base orthonormée directe de l'espace.*

Proposition 2.7.

1. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires.*
2. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.
3. *Soit* $k \in \mathbb{R}$, $\vec{u}, \vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *trois vecteurs de l'espace.*
   - $(k\vec{u}) \wedge \vec{v} = k(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (k\vec{v})$.
   - $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$.
   - $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \wedge\vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$.
4. $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ *est une base orthonormée directe de l'espace.*
   - $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}, \quad \vec{\jmath} \wedge \vec{\imath} = -\vec{k}$
   - $\vec{k} \wedge \vec{\jmath} = -\vec{\imath}, \quad \vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$
   - $\vec{\imath} \wedge \vec{k} = -\vec{\jmath}$.

Corollaire 2.3. *Trois points* A, B *et* C *dans l'espace sont alignés si et seulement si* $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

Démonstration. Découle de la première partie de la proposition 2.7. □

Expression analytique du produit vectoriel

Proposition 2.8. *Soit* $\vec{u}(x,y,z)$ *et* $\vec{v}(x',y',z')$, *dans une base orthonormée directe de l'espace. Alors*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - y'z, x'z - xz', y'x - yx').$$

Démonstration. On peut écrire $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{z}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\vec{u} \wedge \vec{v} &= (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{z}) \\
&= xx'(\vec{\imath} \wedge \vec{\imath}) + xy'(\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath}) + xz'(\vec{\imath} \wedge \vec{k}) \\
&\quad x'y(\vec{\jmath} \wedge \vec{\imath}) + yy'(\vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath}) + yz'(\vec{\jmath} \wedge \vec{k}) \\
&\quad x'z(\vec{k} \wedge \vec{\imath}) + y'z(\vec{k} \wedge \vec{\jmath}) + zz'(\vec{k} \wedge \vec{k}) \\
&= xy'\vec{k} - xz'\vec{\jmath} - x'y\vec{k} + yz'\vec{\imath} + x'z\vec{\jmath} - y'z\vec{\imath} \\
&= (yz' - y'z)\vec{\imath} + (x'z - xz')\vec{\jmath} + (y'x - x'y)\vec{k}
\end{aligned}$$

□

Patriquement, pour moins d'effort de mémoire, on dispose les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{cc} \vec{u} & \vec{v} \\ x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{array}$$

de sorte que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées $\left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \right)$

Exemple 2.5. *$\vec{u} = (1, 1, 2)$ et $\vec{v} = (1, 1, -2)$ dans $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. Alors*

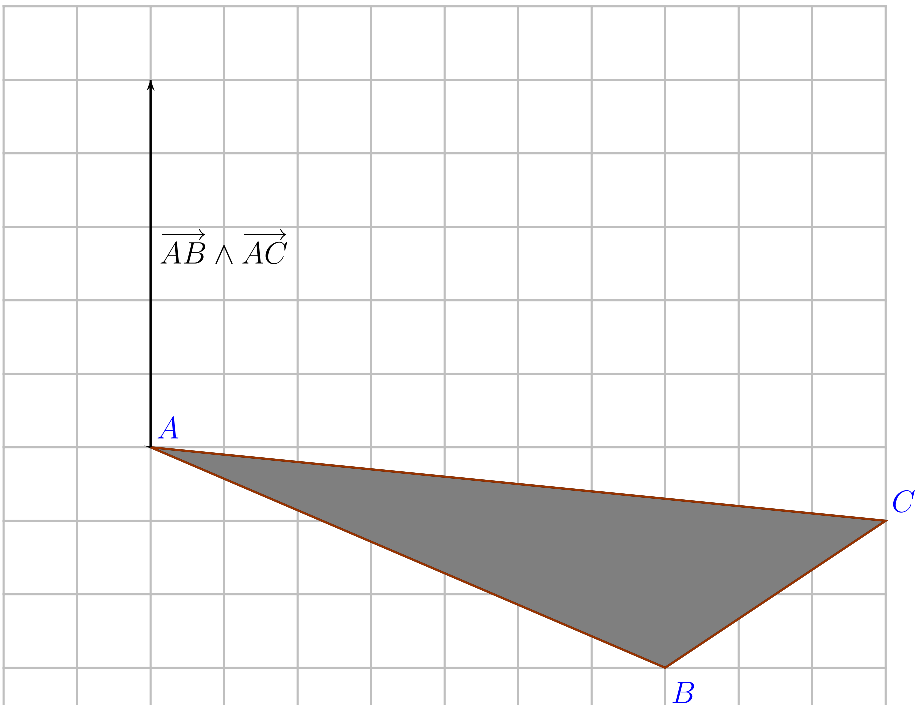
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-4; 4; 0).$$

2.2.3 Applications du produit vectoriel

Application au calcul d'aires

Proposition 2.9. *Soit A, B, C un triangle dans l'espace orienté, et S son aire : alors :*

$$S = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|.$$



Démonstration. On sait (confère livre CIAM Première SM, page 51 et 52) que $S = \frac{1}{2}|det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$ et que $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\| \sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ □

Détermination d'un vecteur normal à un plan défini par un point et deux vecteurs directeurs

On donne $P = (A, \vec{u}, \vec{v})$ alors un vecteur normal à P est $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

Exemple 2.6. *Déterminer une équation du plan (P) defini par les vecteurs $\overrightarrow{AB}(3,0,-4)$ et $\overrightarrow{AC}(2,-1,1)$ où $A(-1,1,2)$.*

On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = (4,-10,2) \neq \vec{0}$. Un point $M(x,y,z)$ appartient au plan (P) si $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ donc si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = 0$, ce qui permet d'avoir $(P) : 2x-5y+z+5=0$.

Distance d'un point à une droite où à un plan

Proposition 2.10. *Soit (D) une droite de repère $(A,\vec{u})$, M un point de l'espace et H le projeté orthogonal de M sur (D). Alors*

$$MH = \frac{\|\overrightarrow{MA}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

Démonstration. On a $\overrightarrow{MA}\wedge\vec{u} = (\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA})\wedge\vec{u} = \overrightarrow{MH}\wedge\vec{u}+\overrightarrow{HA}\wedge\vec{u} = \overrightarrow{MH}\wedge\vec{u}$ car $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire à $\vec{u}$. De plus, $\overrightarrow{MH}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux donc $\|\overrightarrow{MH}\wedge\vec{u}\| = MH\times\|\vec{u}\|$, on déduit la proposition. □

Exercice 2.3. $A(0,3,-1)$, $B(1,4,0)$ $M(1,-1,1)$. *Déterminer la distance de M à (AB).*

Proposition 2.11. *Soit (P) le plan de repère $(A,\vec{u},\vec{v})$, M un point de l'espace et K le projeté orthogonal de M sur (P). Alors :*

$$MK = \frac{\|\overrightarrow{MA}.(\vec{u}\wedge\vec{v})\|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}.$$

Démonstration. $\overrightarrow{MK}$ et $\vec{u}\wedge\vec{v}$ sont colinéaires, on a :

$$\|\overrightarrow{MA}.(\vec{u}\wedge\vec{v})\| = \|(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}).(\vec{u}\wedge\vec{v})\| = \|\overrightarrow{MK}.(\vec{u}\wedge\vec{v})\| = MK\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|.$$

□

Exercice 2.4. *Calculer la distance du point M au plan (ABC) avec $A(0,3,-1)$, $B(1,4,0)$, $C(-2,2,0)$, $M(1,-1,1)$.*

Exercice 2.5. *Faire les exercices 2a page 43 ; 3a, 3c, 3e page 49 ; 1, 5, 9, 13, 20, 22, 30, 38, 44, 50, 54 pages 50,51, 52, 53.*