Chapitre 4

Fonctions numériques

Les fonctions numériques sont déjà introduites depuis la classe de $2nde$. Le taux de variation y permet d'étudier les variations de quelques fonctions. En classe de Première, on introduit les notions de limites et de dérivées qui permettent d'étudier de façon plus approfondies. Dans ce chapitre, nous revisitons ces notions et introduisons les

4.1 Limites

La notion de limite a déjà introduite en classe de Première. Nous rappelons ici les résultats essentiels.

4.1.1 Les limites de référence

$\lim\limits_{x\to 0} x^n = 0 \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\lim\limits_{x\to +\infty} x^n = +\infty,\ n \in \mathbb{N}^*$
$\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^{2n}} \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\lim\limits_{x\to -\infty} x^{2n} = +\infty,\ \lim\limits_{x\to -\infty} x^{2n-1} = -\infty,\ n \in \mathbb{N}^*$
$\lim\limits_{x\to 0, x<0} \frac{1}{x^{2n+1}} = 0$	$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0,\ n \in \mathbb{N}^*$

4.1.2 Opération sur les limites

$\lim f$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	l'	$l' \neq 0$	$l' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(f+g)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

$\lim f$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	l'	$l' \neq 0$	$l' \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim fg$	ll'	$\begin{cases} +\infty \text{ si } l' > 0 \\ -\infty \text{ si } l' < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} +\infty \text{ si } l' < 0 \\ -\infty \text{ si } l' > 0 \end{cases}$	F.I	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

$\lim f$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l = 0$ et $f(x) > 0$	$l = 0$ et $f(x) < 0$
$\lim \frac{1}{f}$	0	$+\infty$	$-\infty$

Proposition 4.1. *Si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ *et* $\lim\limits_{x\to l} g(x) = L$ *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = L$.

On pourra en guise d'application calculer $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin(3x - \pi)$.

Proposition 4.2. *Soit* $P : x \to a_n x^n + a_{n_1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$*, avec* $a_n \neq 0$ *alors :* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} a_n x^n$*.*

Exemple 4.1. *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x^5+2x^2+1)$ *;* $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^5+2x^2+1)$*.*

Proposition 4.3. *Soit* $Q : x \mapsto \frac{a_n x^n + a_{n_1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m_1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$ *avec* $a_n \neq 0$ *et* $b_m \neq 0$*, alors :*

$$\lim_{x\to\pm\infty} Q(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

Proposition 4.4 (Propriété de comparaison)**.** *Soit* f *et* g *deux fonctions définies sur un intervalle de la forme* $]a;+\infty[$*, et telle que* $g(x) \leq f(x)$ *pour tout* $x \in]a;+\infty[$*. Si* $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$*, alors* $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$*.*
Soit f *et* g *deux fonctions définies sur un intervalle de la forme* $]-\infty;a[$*, et telle que* $g(x) \geq f(x)$ *pour tout* $x \in]-\infty;a[$*. Si* $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$*, alors* $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$*.*

Proposition 4.5. *Soit* f *une fonction croissante sur un intervalle ouvert* $]a,b[$ *;* $(a<b)$*.*
- *Si* f *est majorée sur* $]a;b[$*, alors* f *admet une limite finie à gauche en* b*.*
- *Si* f *est minorée sur* $]a;b[$*, alors* f *admet une limite finie à droite en* a*.*
- *Si* f *n'est pas majorée sur* $]a;b[$*, alors* f *admet* $+\infty$ *pour limite à gauche en* b*.*
- *Si* f *n'est pas minorée sur* $]a;b[$*, alors* f *admet* $-\infty$ *pour limite à droite en* a*.*

4.1.3 Branches infinies

Définition 4.1. *On dit qu'une fonction* f *admet une branche infinie en :*
- $+\infty$ *ou* $-\infty$ *si la* $\lim\limits_{\pm\infty} f$ *est finie ou infinie ;*
- x_0 *si* $\lim\limits_{x_0} f$ *est infinie.*

Définition 4.2. *Soit* f *une fonction et* (C_f) *sa courbe représentative.*
- *Si* $\lim\limits_{\pm\infty} f = l$*, on dit que la droite d'équation* $y = l$ *est asymptote horizontale à* (C_f)*.*
- *Si* $\lim\limits_{x_0^-} f = \pm\infty$ *ou* $\lim\limits_{x_0^+} f = \pm\infty$*, on dit que la droite d'équation* $x = x_0$ *est asymptote verticale à* (C_f)*.*

Exemple 4.2. *On concidère la fonction* f *définie par* $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$*. On vérifie que* $y = 2$ *est asymptote horizontale et* $x = 3$ *est asymptote verticale.*

Définition 4.3. *Soit* f *une fonction et* (C_f) *sa courbe représentative. On dit que la droite d'équation* $y = ax + b$ $(x \neq 0)$ *est asymptote oblique à* (C_f) *en* $+\infty$ *(respectivement en* $-\infty$*) si* $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0$ *(respectivement* $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0$*).*

Exemple 4.3. *On vérifie que* $y = x + 1$ *est asymptote oblique à* (C_f) *où* $f(x) = \frac{x^2-2}{x-1}$*.*

Proposition 4.6. *Soit* f *une fonction et* (C_f) *sa courbe représentative. Si* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$*,* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ *et* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax) = b$*, alors la droite d'équation* $y = ax + b$ *est asymptote oblique à* (C_f) *en* $\pm\infty$*.*

Exemple 4.4. $h(x) = \sqrt{x^2+2x+9}$*. On a* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x) = +\infty$*,* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) - x = 1$ *donc* $y = x + 1$ *est asymptote oblique en* $+\infty$*. D'autre part* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{h(x)}{x} = -1$ *et* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x) + x = -1$ *donc* $y = -x - 1$ *est asymptote oblique à* (C_h) *en* $-\infty$*.*

Définition 4.4. *Soit f une fonction et (C_f) sa courbe représentative.*

- *Si* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, *on dit que (C_f) admet une branche parabolique de direction (OJ).*
- *Si* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, *on dit que (C_f) admet une branche parabolique de direction (OI).*

Exemple 4.5. *Proposer deux exemples pendant le cours.*

4.2 Fonctions continues sur un intervalle

4.2.1 Définitions et exemples

Définition 4.5. *Une fonction f est continue en un point x_0 si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I.

Définition 4.6. *On appelle prolongement par continuité de f en x_0 (où $x_0 \notin D_f$ mais* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$*) la fonction g telle que*

$$g : x \mapsto \begin{cases} f(x), & si\ x \in D_f \\ l, & si\ x = x_0 \end{cases}.$$

Exemple 4.6. *Définir le prolongement par continuité de* $f : x \mapsto \frac{2x^2+x-3}{x^2-1}$ *en $x_0 = 1$.*

On a $\lim\limits_{1} f = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2x+3}{x+1} = \frac{5}{2}$. Le prolongement par continuité de f en 1 est la fonction

$$g : x \mapsto \begin{cases} \frac{2x^2+x-3}{x^2-1} & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{5}{2} & \text{si } x = x_0 \end{cases}.$$

4.2.2 Image d'un intervalle par une fonction continue.

Théorème 4.1. *Soit I un intervalle et f une application de I dans $\mathbb{R}$. Si f est continue sur I, alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Théorème 4.2 (théorème des valeurs intermédiaires). *Soit I un intervalle, a et b deux points de I, f une fonction continue sur I, alors pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un x compris entre a et b tel que $f(x) = y$.*

Démonstration. Théorème admis. □

Corollaire 4.1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, s'il existe deux éléments a et b de I $(a < b)$ tels que $f(a)$ et $f(b)$ soit de signes contraires c'est-à-dire $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$.*

Démonstration. Comme $f(a)f(b) < 0$, 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ donc il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = 0$. □

Exemple 4.7. *Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet une solution dans $]0; \frac{\pi}{2}[$.*

Considerons la fonction $f : x \mapsto x - \cos x$. f est continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$. $f(0) = -1$, $f(\pi/2) = \pi/2$. On a $f(0) \times f(\pi/2) < 0$ donc il existe $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$ tel que $f(x_0) = 0$, c'est-à-dire $\cos x_0 = x_0$.

Exemple 4.8. *Soit $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 7$. Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.*

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$. Comme P est continue, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(x_0) = 0$.

Proposition 4.7. *Si f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$ et si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe un unique $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = 0$.*

Exemple 4.9. *Dans l'exemple 1.1, montrer que la solution de l'équation $\cos x = x$ est unique.*

La fonction considérée $f(x) = x - \cos x$ est monotone sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. En effet $f'(x) = 1 + \sin x > 0$ sur $[0, \pi/2]$.

Théorème 4.3. *Soit a et b deux réels tels que $a < b$, on pose $I = [a, b]$.*

1. *Si f est continue et strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur I alors $f(I) = [f(a), f(b)]$ (resp $f(I) = [f(b), f(a)]$.)*
2. *Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On pose $I = [a, b[$. Si f est continue et strictement croissante (resp strictement décroissante) sur I, alors $f(I) = [f(a), \lim\limits_{b^-} f[$ (resp $]\lim\limits_{b^-} f, f(a)]$).*
3. *$a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $I =]a, b[$. Si f est continue et strictement croissante (resp décroissante) sur I, alors $f(I) =]\lim\limits_{a^+} f, \lim\limits_{b^-} f[$ (resp $f(I) =]\lim\limits_{b^-} f, \lim\limits_{a^+} f[$)*

Exemple 4.10.
1. $f : x \mapsto -x^3$, $I = [1, 3]$, $f(I) = [-23, -1]$.
2. $f : x \mapsto \sqrt{2x^2 + 3}$, $I = [1; +\infty[$, $f(I) = [\sqrt{5}; +\infty[$.
3. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, $I =] - \infty; -1[$, $f(I) =] - 1, 0[$.

Théorème 4.4. *Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I, alors f est une bijection de I sur $f(I)$ et la bijection réciproque f^{-1} de f est continue et strictement monotone de même sens de $f(I)$ sur I.*

Exemple 4.11. *Démontrer que $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x-5}$ réalise une bijection de $]5; +\infty[$ sur $]2; +\infty[$. Déterminer la bijection réciproque.*

On a $f'(x) = -\frac{11}{(x-5)^2}$. Pour tout $x \in]5; +\infty[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]5; +\infty[$. On déduit d'après le théorème que f réalise une bijection de $]5; +\infty[$ sur
$f(]5; +\infty[) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x); \lim\limits_{x\to5^+} f(x)[=]2; +\infty[$. La bijection réciproque est définie par $f^{-1}(x) = \frac{5y+1}{y-2}$.

4.3 Dérivation et étude de fonctions

4.3.1 Nombre dérivé-Fonction dérivée

Définition 4.7. *Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un intervalle I. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en x_0 et admet le réel A pour nombre dérivé en ce point si l'une des deux propriétés équivalentes ci-dessous est vérifée :*

- *il existe une fonction φ de limite 0 en 0 telle que $\forall h \in \mathbb{R}$, on ait :*
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + h\varphi(h).$$
- *la fonction $\theta : h \mapsto \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet le réel A pour limite en 0, $\lim\limits_{h\to0} \theta(h) = A$. On note $f'(x_0) = A$ et an l'appelle le nombre dérivé de f en x_0.*

La fonction $h \mapsto f(x_0) + Ah$ est l'approximation affine de $h \mapsto f(x_0 + h)$ au voisinage de x_0.

Proposition 4.8. *Soit f une fonction définie sur I, $x_0 \in I$. Si f est dérivaable en x_0, alors f est continue en x_0.*

Interpretation graphique

Le nombre dérivé de la fonction f en x_0 lorsqu'il existe est le coefficient directeur de la tangente T à $(\mathcal{C}_f)$ au point $M(x_0, f(x_0))$. Une équation de T est

$$T : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Remarque 4.1. *Si le nombre dérivé de f en x_0 vaut 0, alors la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ en $M(x_0, f(x_0))$ est parallèle à l'axe des abscisses.*

Il peut arriver que $(\mathcal{C}_f)$ admette en M_0 une tangente sans que f soit dérivable en x_0. C'est le cas par exemple lorsque le taux d'accroissement $\theta(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet pour limite en 0 est $\pm\infty$. La tangente en M_0 à $(\mathcal{C}_f)$ est alors parallèle à l'axe des ordonnées. C'est la droite d'équation $x = x_0$.

Exemple 4.12. $f : x \mapsto \sqrt{x}$. *Etudier la dérivabilité de f en 0.*

On a $\theta(h) = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$ et $\lim\limits_{0} \theta = +\infty$. f n'est pas dérivable en 0 mais $(\mathcal{C}_f)$ admet en 0 une tangente verticale.

insérer la figure

4.3.2 Nombre dérivé à droite-Nombre dérivé à gauche

Définition 4.8. *Soit f une fonction et x_0 un point de D_f.*
On dit que f admet le réel A pour nombre dérivé à droite en x_0 lorsque

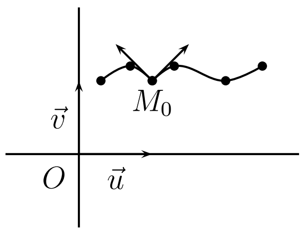
$$\lim_{h\to 0, h>0} \theta(h) = A = \lim_{x\to x_0, x>x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

On note $f'_d(x_0) = A$.
On dit que f admet le réel B pour nombre dérivé à gauche en x_0 lorsque

$$\lim_{h\to 0, h<0} \theta(h) = B = \lim_{x\to x_0, x<x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

On note $f'_d(x_0) = B$.

Définition 4.9. *Si f admet le réel A pour nombre dérivé à droite (resp le réel B pour nombre dérivé à gauche), alors la droite passant par $M_0(x_0, f(x_0))$ et de coefficient directeur A (resp B) est appelé demi-tangente à droite (resp à gauche) de $(\mathcal{C}_f)$ en M_0. Si les deux demi-tangentes sont distinctes, le point M_0 est appelé point anguleux de $(\mathcal{C}_f)$.*



Définition 4.10. *Soit f définie sur un intervalle I, f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. Et si f est dérivable sur I, on définit :*

$$f' : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

Si f' est dérivable sur I on définit f'' par

$$\begin{array}{rccl} f'': & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (f')'(x) = f''(x) \end{array}$$

Par itération, si n est un entier supérieur ou égal à 2, la fonction dérivée $n-$ième de f est $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

Remarque 4.2. *On a $f^{(0)} = f$ et $f^{(n)} \neq f^n$.*

On a les notations différentielles suivantes :

$$\frac{df}{dx} = f', \quad \frac{d^2f}{dx^2}, \ldots, \frac{d^nf}{dx^n} = f^{(n)}.$$

Il y a aussi les notions de dérivées partielles pour des fonctions à plusieurs variables.

Soit par exemple $f(x, y) = 3x^2y - x^3y + 2y$.

- Dérivée partielle par rapport à x : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6xy - 3x^2y$.
- Dérivée partielle par rapport à y : $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 - x^3 + 2$.

4.3.3 Dérivation d'une fonction composée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J contnu dans $f(I)$. Soit $x_0 \in I$, si f est dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = [g' \circ f(x_0)] \times f'(x_0).$$

Exemple 4.13. *Montrer que $h(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer h'.*

Posons $h = g \circ f$ avec $f : x \mapsto 2x + \frac{\pi}{4}$ et $g : x \mapsto \cos x$. f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$, or $f'(x) = 2$ et $g(x) = -\sin x$, d'où $h'(x) = -2\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 4.1. *En utilisant la définition de la dérivée, calculer la limite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.*

4.3.4 Dérivée de la fonction réciproque d'une fonction strictement monotone

Théorème 4.5. *Soit f une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle I, alors f est bijective de I sur $f(I)$ et sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable en tout point x de $f(I)$ tel que $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$. Alors :*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \quad (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Démonstration. On a $f^{-1} \circ f = Id$. $\forall x \in I$, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

$$\begin{aligned} (f \circ f^{-1})(x) = x \quad &\Leftrightarrow \quad (f \circ f^{-1})'(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad (f' \circ f^{-1})(x) \times (f^{-1})'(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \end{aligned}$$

□

Exemple 4.14. *$f : [-\pi/2; \pi/2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$. Montrer que f est une bijection de $[-\pi/2; \pi/2]$ sur $[-1, 1]$ et déterminer la fonction dérivée de f^{-1}.*

On a $f'(x) = \cos x > 0, \quad \forall x \in]-\pi/2; \pi/2[$. f est continue et strictement croissante sur $[-\pi/2; \pi/2]$ et $f([-\pi/2; \pi/2]) = [-1, 1]$. f^{-1} est dérivable sur $]-1; 1[$ et $\forall x \in]-1, 1[$,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos[f^{-1}(x)]}.$$

Or $\cos^2 f^{-1}(x) + \sin^2 f^{-1}(x) = 1$, on en déduit

$$\cos f^{-1}(x) = \sqrt{1 - \sin^2 f^{-1}(x)} = \sqrt{1 - (f \circ f^{-1})^2(x)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

On en déduit que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

4.3.5 Inégalité des accroissements finis.

Théorème 4.6. *Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. S'il existe des réels m et M tels que $\forall x \in [a, b]$ on a $m \leq f'(x) \leq M$, alors on a*

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

Démonstration. Supposons f dérivable sur $]a, b[$ et $m \leq f'(x) \leq M$. Considérons la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = Mx - f(x)$. g est dérivable sur $]a, b[$ et $g'(x) = M - f'(x) \geq 0 \forall x \in]a, b[$. Donc g est croissante sur $[a, b]$ et comme $a < b$, on a $g(a) \leq g(b)$ d'où $Ma - f(a) \leq Mb - f(b)$, ainsi $f(b) - f(a) \leq M(b - a)$. Pour montrer l'autre inégalité, considérer la fonction h définie sur $[a, b]$ par $h(x) = f(x) - mx$; montrer qu'elle est décroissante et conclure. □

Corollaire 4.2. *Soit f une fonction dérivable sur $]a, b[$, s'il existe un réel M tel que $\forall x \in [a, b]$ on ait $|f'(x)| \leq M$, alors*

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

Exemple 4.15. *Démontrer que $\forall x \in [0, \pi/2]$, $x \leq \tan x$.*

Considérer $f(t) = \tan t$ définie sur $[0, \pi/2[$. On a $f'(t) = 1 + \tan^2 t \leq 1$. Soit $x \in [0; \pi/2[$, appliquons l'inégalité des accroissements finis à $[0, x]$, il vient $1(x - 0) \leq (f(x) - f(0))$ d'où $x \leq \tan x$. L'inégalité reste encore vraie pour $x = \pi/2$.

Exposé 5. *Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$.*

4.3.6 Dérivabilité et étude des fonctions

Proposition 4.9 (Extremum)**.** *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un point intérieur de I. Si f admet un extremum en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.*

Démonstration. Supposons f dérivable en x_0. x_0 étant intérieur à I, il existe $\alpha > 0$ tel que $]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[\subset I$. Supposons que f admette un extremum en x_0, sans nuire à la généralité, supposons qu'il s'agit un maximum

- si $0 < h < \alpha$, alors $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$;
- si $-\alpha < h < 0$, alors $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$;

On en déduit que $f'_d(x_0) \leq 0$ et $f'_g(x_0) \geq 0$ donc $f'(x_0) = 0$. □

Proposition 4.10. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, et x_0 un point intérieur à I, si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet un extremum en x_0.*

Démonstration. Supposons que f' s'annule en x_0 en changeant de signe. Sans nuire à la généralité, supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $]x_0-\alpha; x_0+\alpha[\subset I$ et $\forall x \in]x_0-\alpha, x_0]$, $f'(x) \leq 0$ et $\forall x \in [x_0, x_0+\alpha[$, $f'(x) \geq 0$. On rappelle que $f'(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Si $x \in]x_0-\alpha, x_0[$, alors $x-x_0 < 0$ et comme $f'(x) \leq 0$, on a $f(x) - f(x_0) \geq 0$ donc $f(x) \geq f(x_0)$. Si $x \in]x_0; x_0+\alpha[$, alors $x - x_0 \geq 0$ et comme $f'(x) \geq 0$, on a $f(x) - f(x_0) \geq 0$ d'où $f(x) \geq f(x_0)$. On en déduit que pour tout $x \in]x_0-\alpha; x_0+\alpha[$, $f(x) \geq f(x_0)$. Donc f atteint un maximum relatif en x_0. □

Proposition 4.11. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors f' est nulle si et seulement si f est constante sur I.*

Proposition 4.12. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors f' est positive sur I (respectivement négative sur I) si et seulement si f est croissante (respectivement décroissante) sur I.*

Remarque 4.3. *Pour étudier les variations d'une fonction, on cherche à déterminer les intervalles I contenus dans son ensemble de définition et sur lesquelles f est dérivable et admet une dérivée de signe constant.*

Position relative d'une courbe par rapport à ses tangentes.

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, (C) sa courbe représentative et (T) la tangente à (C) en un point d'abscisse x_0 de I, alors :
★ si f'' est positive sur I, c'est-à-dire, si $\forall x \in I$, $f''(x) \geq 0$, alors (C) est au dessus de (T) sur I. On dit que f est convexe sur I ;
★ si f'' est négative sur I, alors (C) est en dessous de (T).

Démonstration. Considérons la fonction $h(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$. On a $h(x_0) = 0$.

- $h'(x) = f'(x) - f'(x_0)$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = f'(x_0) \Leftrightarrow x = x_0$.
- $h''(x) = f''(x)$. Si $f'' > 0$ sur I, $h'' > 0$ sur I donc h' est strictement croissante sur I, comme $h'(x_0) = 0$, on a $h'(x) < 0$ pour $x < x_0$ et $h'(x) > 0$ pour $x > x_0$. Il en découle que h est décroissante pour $x < x_0$ et croissante pour $x > x_0$.

La conclusion est que $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$, $h(x) > 0$ donc (C) est au dessus de (T) sur I. □

Définition 4.11 (point d'inflexion). *Un point M_0 d'une courbe (C) est un point d'inflexion si en M_0, (C) traverse la tangente.*

Proposition 4.13. *Si f est deux fois dérivable, $M_0(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de (C_f) si et seulement si f'' s'annule en x_0 en changeant de signe.*

4.4 Primitive d'une fonction continue

On a appris en classe de Première et dans la section qui précède, à dériver une fonction f. Une question logique, se pose : étant donnée une fonction f,continue sur un intervalle I, peut-on trouver une fonction F telle que $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$? Le but de cette section est de répondre à cette question.

4.4.1 Définition et propriétés

Définition 4.12. *Etant donnée une fonction f définie sur un intervalle I, toute fonction F telle que $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$ est appelée primitive de f sur I.*

Exemple 4.16. *1. Pour $f(x) = 2x$ sur $I = \mathbb{R}$. On a $F_1(x) = x^2$, $F_2(x) = x^2 + 2$ sont des primitives de f. Trouver d'autres primitives de f.*

2. $f(x) = -\sin x$ sur $I = \mathbb{R}$, on a $F(x) = \cos x$.

Théorème 4.7 (Condition d'exeistence)**.** *Toute fonction continue sur un intervalle I admets des primitives sur I.*

Théorème 4.8. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si F est une primitive de f sur I, alors toute autre primitive de f sur I est de la forme $F + k$ où $k \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I. Soit $k \in \mathbb{R}$, On a $(F + k)(x) = F(x) + k$ donc $(F + k)'(x) = F'(x) + k' = f(x) + 0 = f(x)$. Ainsi $F + k$ est aussi une primitive de f.
Réciproquement, soit G une autre primitive de f sur I. Alors $G - F$ est dérivable et on a $\forall x \in I$, $(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ donc il existe $k \in R$ tel que $G - F = k$, il vient $G = F + k$. □

Théorème 4.9. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $x_0 \in I$ et y_0 un réel tel quelconque. Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.*

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I. Toute autre primitive de f sur I est de la forme $F + k$, ainsi $(F + k)(x_0) = y_0 \Rightarrow k = y_0 - F(x_0)$. □

4.4.2 Calcul des primitives

Tableau des primitives usuelles

	Fonction f	Primitive de f
$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$x \mapsto k, k \in \mathbb{R}$
$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto a$	$x \mapsto ax + k,\ k \in \mathbb{R}$
$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k,\ k \in \mathbb{R}$
$I \subset \mathbb{R}^*$	$x \mapsto \frac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$x \mapsto -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + k,\ k \in \mathbb{R}$
$I \subset \mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + k,\ k \in \mathbb{R}.$
$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + k,\ k \in \mathbb{R}$
$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + k,\ k \in \mathbb{R}$
$I =]-\pi/2; \pi/2[$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x + k,\ k \in \mathbb{R}$

Dans le tableau ci-dessous, f' désigne la dérivée de f, F est une primitive de f, G est une primitive de g sur I.

	Fonctions	Primitives
$I \subset \mathbb{R}$	$af + bg,\quad a, b \in \mathbb{R}$	$aF + bG$
$I \subset \mathbb{R}$	$f'f^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n+1}f^{n+1} + k,\ k \in \mathbb{R}$
$I \subset \mathbb{R},\ f \neq 0$	$\frac{f'}{f^n},\ n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$-\frac{1}{(n-1)f^{n-1}} + k,\ k \in \mathbb{R}$
$I \subset \mathbb{R}, f > 0$	$\frac{f'}{\sqrt{f}}$	$2\sqrt{f} + k,\ k \in \mathbb{R}$
$I \subset \mathbb{R}$	$x \mapsto ag(ax + b),\ a, b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto G(ax + b) + k$
$I \subset \mathbb{R}$	$(g' \circ f) \times f'$	$G \circ f + k,\ k \in \mathbb{R}.$

Exemple 4.17. *Trouver la primitive de* $f : x \mapsto x^3 - \frac{2}{x^2}$ *qui prend la valeur* 0 *en* 2 *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Les primitives de f sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{x} + k$, $k \in \mathbb{R}$. Celle qui prend la valeur 0 en 2 est celle telle que $\frac{1}{4}2^4 + \frac{2}{2} + k = 0$ soit $k = -5$. D'où $F_0(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{x} - 5$.

Exemple 4.18. *Faire les exercices de* 1 *à* 10 *de la page 250.*

Exercice 4.2. *1, 4, 6, 10, 14, 20, 22, 24, 33, 37, 39 Pages 228, 229, 230.*